Семинар №1.
Кинематика.

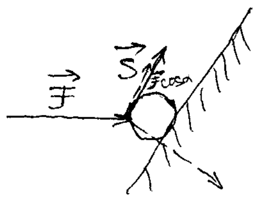
6.02.03

Понятия пространства. Положения в пр-ве. Время. Скорость: $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Ускорение: $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$

Направления скорости и ускорения.

Вектора и скалярное пр-ние:

$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\alpha$



$(\vec{F}\cdot\vec{S})=F_x\cdot x+F_y\cdot y+F_z\cdot z$

Уравнения движения:

$a=\ddot{x}$; $\quad \ddot{x}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=a=const$;

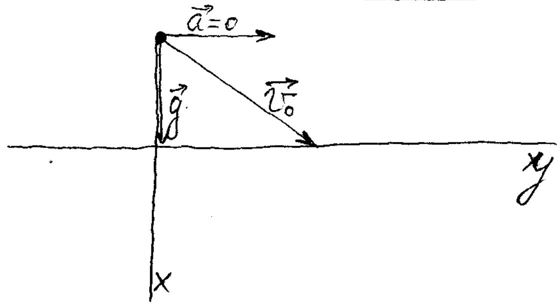
$\dot{x}=at+C$; $t=0$, $\dot{x}=v=v_{нач}$

$\dot{x}=at+v_0$;

$x=\frac{at^2}{2}+v_0t+\tilde{C}$; $t=0$; $x=x_{нач}$

$\boxed{x=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0}$ — кинематическое уравнение.

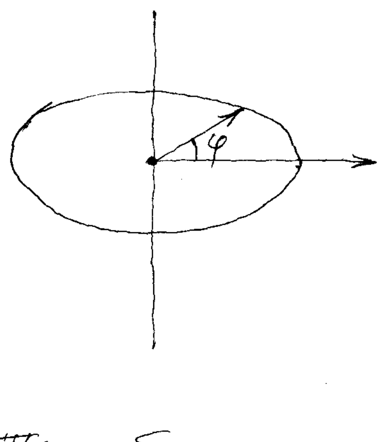
№1



$x=\frac{gt^2}{2}+v_{0x}t+x_0$

$y=v_{0y}t+y_0$

№2



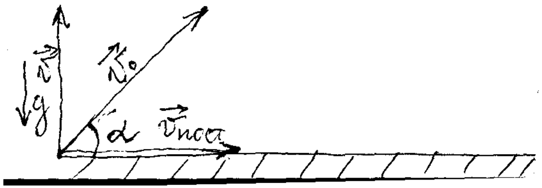
$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$

$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$

$\omega=\cancel{\omega_0 t}\ \varepsilon t+\omega_0$

$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2}$

№3. Тело брошено под углом $\alpha=45°$ к гор., $v_0=20$ м/с



Поместим систему координат в точку бросани
Кинематические уравнения:

$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$

$y = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$

$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$y = tg\alpha \cdot t - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$ – уравнение траектории

$y'_x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$, x_0 – т. max.

$y = tg\alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{2x_0}\right) \qquad x = u + x_0$

$y = tg\alpha \cdot \frac{x_0^2 - u^2}{2x_0}$

Найти время полета, скорость v по мод. и напр. в момент падения на землю.

Д/з. §1 № 10, 23, 26, 12, 20, 27, 30, 45

$y = 0 \Rightarrow 10\sqrt{2}t - 4,9t^2 = 0$

$10\sqrt{2} = 4,9t \Rightarrow$

$t \approx 2,886$

$v_x = -v_0 \sin\alpha \cancel{t} = -10\sqrt{2}$

$v_y = v_0 \cos\cancel{t}\alpha - gt = 10\sqrt{2} - 9,8 \cdot 2,886 = -14,14$

$|v| = \sqrt{200 + 14,14^2} \approx 20$ м/с

$\angle = 135°$ к горизонту.

6.02.03.

Лекция № 1.

Механика.

— раздел физики, изучающий движение макротел.

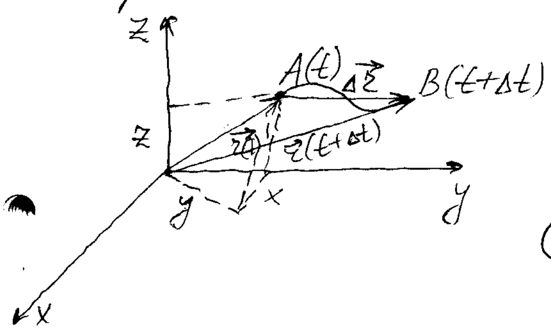
Кинематика.

Описание движения.

Материальная точка — реальное физическое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Повторить полярную систему координат.

Декартова система координат:

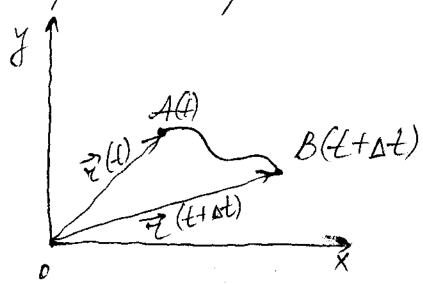


$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Повторить разл. в-ра по осям, слож. и вычит. вектора.

Траектория — линия, отображ. движение тела.



$$S = \int \Delta S$$

$\vec{v}(\Delta t) = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ — средняя скорость.

$\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ — мгновенная скорость.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\cdot\vec{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\cdot\vec{j} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\cdot\vec{k}$$

Абс. величина: $v = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dr}{dt} \Rightarrow dS = v\,dt$

Ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}\cdot\vec{i} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y}\cdot\vec{j} + \underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{a_z}\cdot\vec{k}.$$

$\vec{a} = const = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}$ $\qquad x(t), y(t), z(t) = ?$

$$\vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x dt = dv_x \Rightarrow v_x = a_x t + c,\ c - const.$$

Пусть задано $\vec{v_0} = v_{0x}\cdot\vec{i} + v_{0y}\cdot\vec{j} + v_{0z}\cdot\vec{k}$

(t=0) $v_{x0} = c \Rightarrow v_x = v_{0x} + a_x t$. Аналогично: $v_y = v_{0y} + a_y t$,
$v_z = v_{0z} + a_z t$.

$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow \int dx = \int (v_{0x} + a_x t)dt \Rightarrow$

$x = v_{0x}\cdot t + \frac{a_x t^2}{2} + c$, c – const.

$\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \Rightarrow$

при $t = 0$ $x_0 = c \Rightarrow x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$

Аналогично: $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$;

$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}$.

Поступательное движение – это такое движение, при котором а) все точки тела движутся по параллельным траекториям
б) любая прямая, проведенная в теле, движется параллельно самой себе.

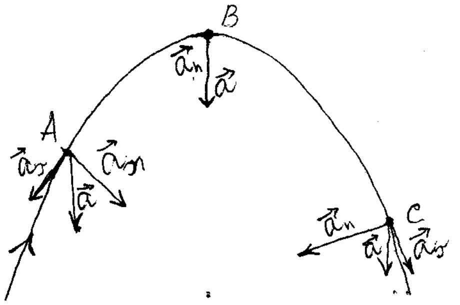
Кинематика по криволинейной траектории

$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{\vec{v}}{v}$ – тангенциальное (касательное) ускорение

$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}$ – нормальное ускорение.

ед. вектор, направл. к центру траектории



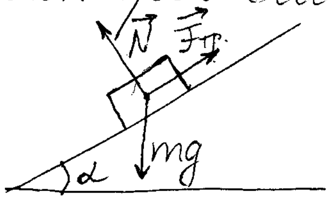
Динамика.

I закон Ньютона: в инерц. сист. коорд. если на тело не действуют никакие силы либо равнодейств. всех сил равна 0, тело движется равномерно и прямолинейно либо покоится.

Сила, действующая на тело – это количественная мера действия на данное тело других тел либо силовых полей.

Принцип суперпозиции сил:

Силы действуют независимо друг от друга и тело под действием сил ~~тело~~ движется как под действием вектора силы, равного сумме векторов сил.



Импульс тела: $\vec{p} = m\vec{v}$.

II закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (m = const,\ v \ll c)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Масса есть мера инерции тела.

Инертность – это св-во тел сопротивляться изменению скорости.

III закон Ньютона:

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. Силы, с которыми взаимодействуют тела, равны по величине, противоположны по направлению и направлены по одной прямой.

Виды взаимодействия:

1) гравитационное
2) электромагнитное
3) ~~ст~~ ядерное
4) слабые.

02.03г. Домашняя работа

1.10 Дано: закон движения $x = At + Bt^2$;
$A = 4$ м/с;
$B = -0,05$ м/с²

Найти: t', т.ч. $v(t') = 0$, $x(t')$-?, $a(t')$-?
построить графики: $x(t)$, $S(t)$, $v(t)$, $a(t)$

Решение:

1. $v(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow v(t) = (At + Bt^2)' = A + 2Bt$

Если $v(t) = 0$, то $A + 2Bt = 0$;
$4 - 0,01t = 0$;
$t = 40$.

Т.о. $v = 0$ через 40 с после начала движения.

$x(t) = x(40) = 4 \cdot 40^2 - 0,05 \cdot 1600 = 80$, т.е. коорд. равна 80.

$a(t) = \ddot{x}(t) = \dot{v}(t) \Rightarrow a(t) = (A + 2Bt)' = 2B$, т.е.
ускорение постоянно, а зн. и через 40 с $-0,1$ м/с²

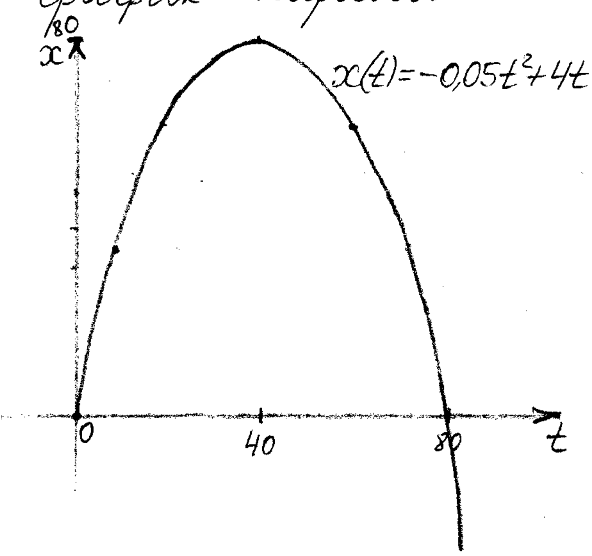
2. 1) $x(t) = -0,05t^2 + 4t$

$x(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = 80$

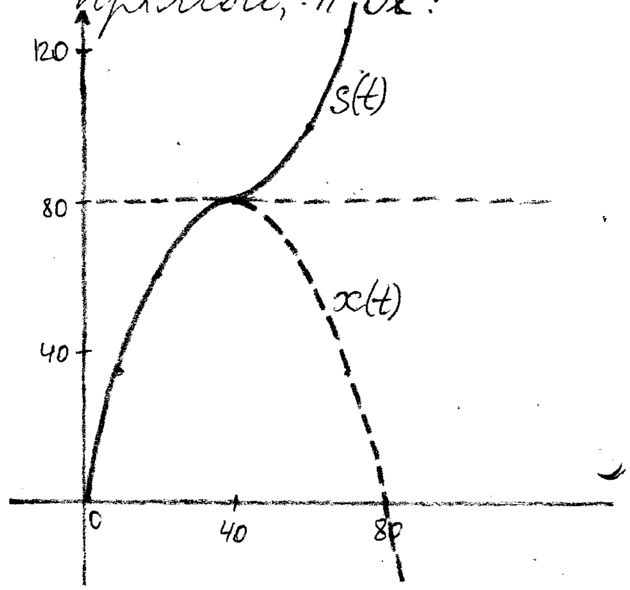
$t_{max} = -\frac{4}{2(-0,05)} = 40$

$x_{max} = x(40) = 80$

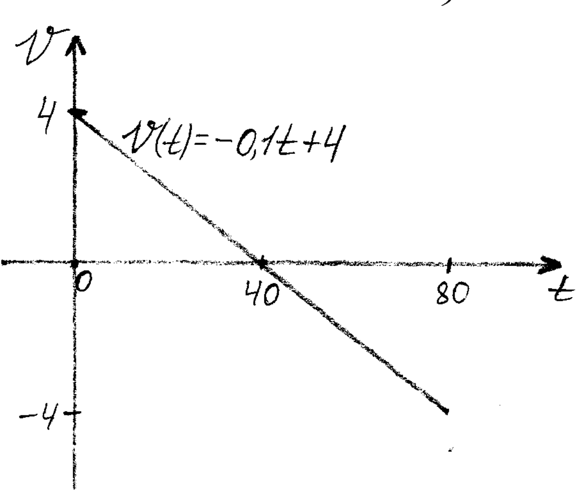
график - парабола



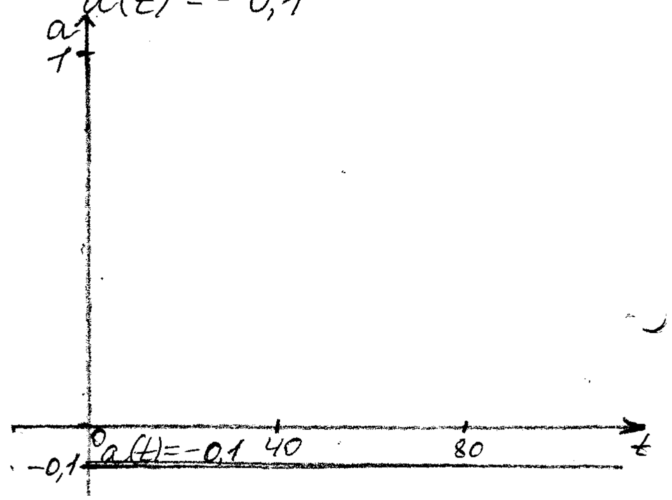
2) Для построения з-сти $S(t)$ нужно часть параболы правее $t=40$ отразить относит. прямой, || Ot:



3) Зависимость скорости - линейная: $v(t) = -0,1t + 4$



4) Ускорение - константа и от врем. не зависит, т.е.
$a(t) = -0,1$



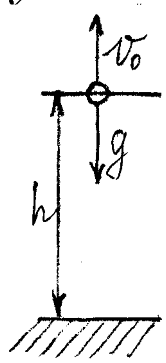
1.23. Дано: $v_0 = 10$ м/с;
$h = 12,5$ м
Найти: $x(t)$, $\langle v \rangle$
Решение:

1. Кинетическое ур-ние в общем виде:

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, полагая $x_0 = h$, $a = -g$ имеем:

$x(t) = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

2. Рисунок:



Рассмотрим пройденный путь:

1) $v_0 = 10$ м/с; $v_1 = 0$

$v = v_0 + at \Rightarrow v_1 = v_0 - gt_1$;

$v_0 = gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}$

$S_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$

2) $S_2 = S_1 + h = \frac{v_0^2}{2g} + h$

$S_2 = \frac{gt_2^2}{2}$ (т.к. $v_{нач} = v_1 = 0$) $\Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2S_2}{g}}$

3) Т.о. $S_{общ} = S_1 + S_2 = \frac{v_0^2}{g} + h$

$t_{общ} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2S_2}{g}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g}$

$$\langle v \rangle = \frac{S_{об}}{t_{об}} = \frac{\frac{v_0^2 + hg}{g}}{\frac{v_0^{\cancel{2}} + \sqrt{v_0^{\cancel{2}} + 2hg}}{g}} = \frac{v_0^2 + hg}{v_0^{\cancel{2}} + \sqrt{v_0^{\cancel{2}} + 2hg}}$$

$$\langle v \rangle = \frac{100 + 12,5 \cdot 9,8}{10\cancel{0} + \sqrt{100 + 2 \cdot 12,5 \cdot 9,8}} \approx 7,79 \text{ (м/с)}$$

Ответ: $x(t) = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$; $\langle v \rangle \approx 7,79$ м/с.

1.26 Дано: закон движ. по пл-сти $r(t) = \vec{i}At^3 + \vec{j}Bt^2$
Найти: $v(t)$; $a(t)$

Решение:

1. $v(t) = \dot{r}(t) \Rightarrow$

$v(t) = (\vec{i}At^3 + \vec{j}Bt^2)' = 3iAt^2 + 2jBt$

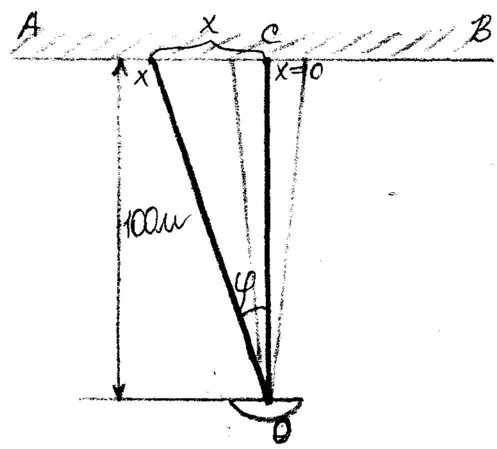
2. $a(t) = \ddot{r}(t) = \dot{v}(t) \Rightarrow$

$a(t) = (3iAt^2 + 2jBt)' = 6iAt + 2jB$

Ответ: $v(t) = i3At^2 + j2Bt$;

$a(t) = i6At + j2B$.

1.12 Дано: $l = 100$ м;
$T = 20$ с
$t = 2$ с
Найти: $x(t)$, $v(2)$
Решение:



1) во время движения в указан. период координата равна расстоянию CX, а соот-но:

$CX = l\,tg\varphi$

φ связано с периодом и временем вращения:

$\varphi = \frac{2\pi}{T}\cdot t \Rightarrow$

$x(t) = l\cdot tg\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$

2) Скорость: $v(t) = \dot{x}(t)$

$$v(t) = \left[l\cdot tg\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right]' = l\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)}\cdot\frac{2\pi}{T} = 2\pi l\Big/\left(T\cdot\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$$

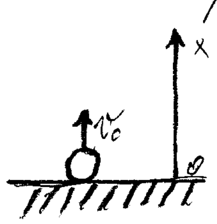
Тогда: $v(2) = 2\pi\cdot 100/20\cdot\cos^2\frac{\pi}{5} \approx 48{,}0$ м/с

Ответ: $x(t) = l\cdot tg\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$; $v(t) = 2\pi l/T\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$; $v(2) = 48$ м/с

1.20 Дано: $V_0 = 20$ м/с
$\tau = 1$ с
Найти: h встречи

Решение:

1) Рассмотрим движение первого камня:



$x_0 = V_0 t - \frac{gt^2}{2}$

В этом случае координата x совпадает с высотой h

2) Рассмотрим движение второго камня:

Время нахождения в пути $t-\tau$, т.е. $t-1$, тогда:
$x = V_0(t-1) - \frac{g(t-1)^2}{2}$

3) Камни встретятся, когда их координата-высота будут равны, т.е.:

$V_0 t - \frac{gt^2}{2} = V_0 t - V_0 - \frac{gt^2}{2} + gt - \frac{g}{2}$;

$\left(t\cdot(V_0+g) = \frac{g}{2} \Rightarrow t = \frac{g+2V_0}{2(V_0+g)}\right)$

$t = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2} = \frac{20}{9,8} + 0,5 \approx 2,541$

$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 20 \cdot 2,541 - \frac{9,8 \cdot 2,541^2}{2} \approx 19,18$ (м)

Ответ: 19,18 м.

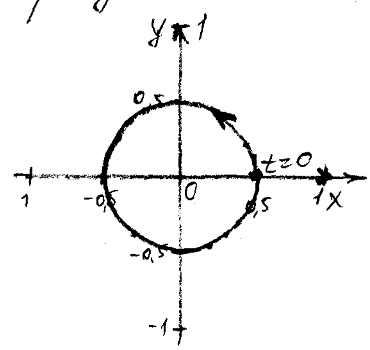
1.27 Дано: уравнение $r(t) = A(i\cos\omega t + j\sin\omega t)$;
$A = 0,5$ м;
$\omega = 5$ рад/с.

Найти: траекторию;
$|v|$;
$|a_n|$.

Решение:

1) Очевидно, что если по x откладывать cos, а по y – sin того же угла, то получится окружность, радиус которой определяется параметром A:

Траектория:



2) Если тело движется по окружности радиуса R, т[о] скорость v связана с угловой скоростью соотнош[ением]:

$v = \omega \cdot R$ (т.к. скорость опред. как $\frac{\omega}{2\pi\,(рад)} \cdot 2\pi R\,(м) = v\,(м/с)$)

Т.о. $|v| = \omega \cdot R = 0,5 \cdot 5 = 2,5$ м/с

3) Нормальное ускорение также связано с ω:

$a_n = -\omega^2 R \Rightarrow |a_n| = \omega^2 R$

$|a_n| = 5^2 \cdot 0,5 = 12,5$ м/с²

Ответ: окружность; 2,5 м/с; 12,5 м/с².

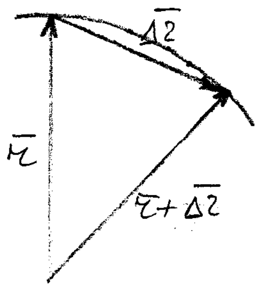
1.30 Дано: $R = 4$ м
$v_0 = 3$ м/с
$a_\tau = 1$ м/с²
$t = 2$ с

Найти: S
$|\Delta r|$
$\langle v \rangle$
$|\langle \vec{v} \rangle|$

Решение:

1) Для определения пути достаточно воспользоваться формулой $S(t) = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$, т.к. R в д. сл. зн-ния не имеет.

$s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \Rightarrow s(2) = 3\cdot 2 + \frac{1\cdot 2^2}{2} = 8$ (м)

2) 

Модуль $|\Delta \bar r|$ равен длине хорды, т.к. $S = 8$ м, а $l_{окр.} = 8\pi$, т.е. тело не прошло и половины.

Длина хорды угла φ:

$l_x = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$

$\varphi = \frac{S}{l_{окр.}}\cdot 2\pi \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{S}{l_{окр.}}\pi = \frac{S}{2\pi R}\pi = \frac{S}{2R} \Rightarrow$

$l_x = |\Delta\bar r| = 2R\sin\frac{S}{2R} = 2\cdot 4\cdot\sin 1 \approx 6{,}73$ (м)

3) $\langle v\rangle = \frac{S}{t}$, $S = 8$ м; $t = 2$ с $\Rightarrow \langle v\rangle = \frac{8}{2} = 4$ (м/с)

4) Средний вектор скорости: $\langle \bar v\rangle = \frac{\Delta \bar r}{t} \Rightarrow$

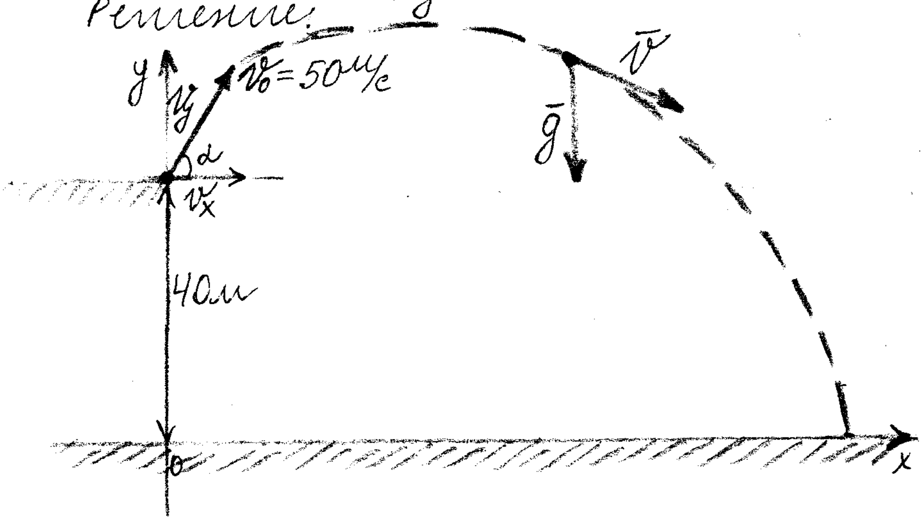
$|\langle\bar v\rangle| = \frac{|\Delta \bar r|}{t} \Rightarrow |\langle v\rangle| = \frac{6{,}73}{2} \approx 3{,}36$ (м/с)

Ответ: 8 м; 6,73 м; 4 м/с; 3,36 м/с.

1.45 Дано: $\alpha = 60°$
$h = 40$ м
$v_0 = 50$ м/с

Найти: ур-ния кин.+траект;
ур. траект.;
$T_{полета}$
H_{max}
$S_{гориз}$
$v_{пад.}$

Решение:



1) Кинематические ур-ния:

$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow y = 40 + v_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$, т.е.

$y = h + v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}$

$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$, $x_0 = 0, a_x = 0 \Rightarrow$

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t$

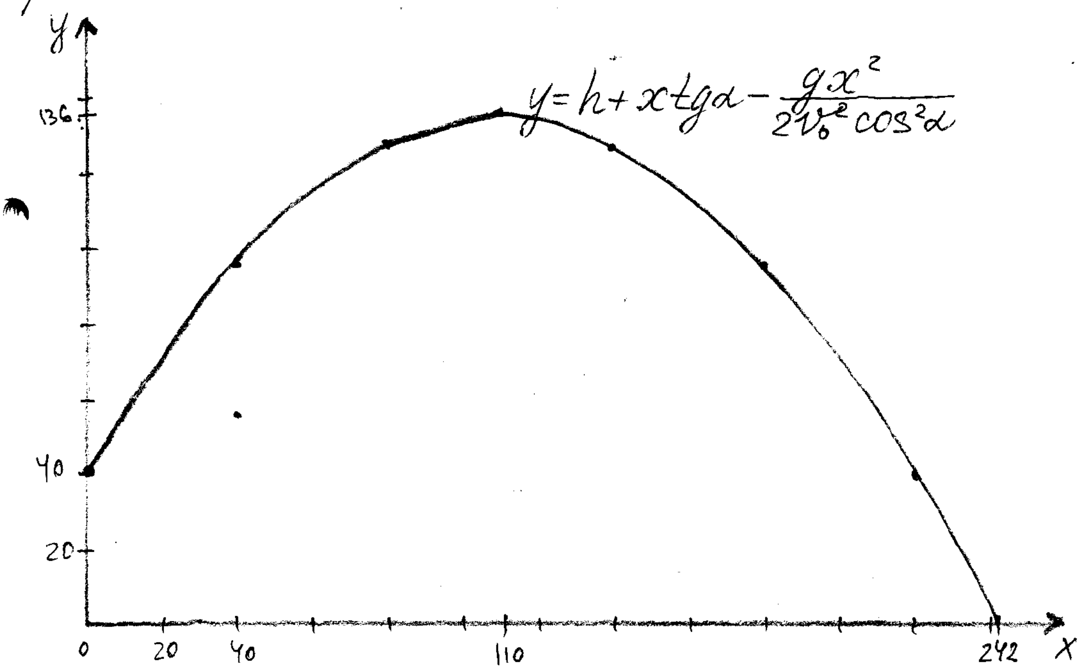
Соответственно, уравнение траектории:

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow$

$$y = h + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} =$$

$$= h + x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Чертеж:



2) Мина закончит полет, когда $y = 0$, т.е.:

$y = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow$

$4{,}9t^2 - 25\sqrt{3}t - 40 = 0$

$D = 1875 + 160 \cdot 4{,}9 = 2659 \Rightarrow$

$t \approx \frac{25\sqrt{3} + 51{,}57}{9{,}8} \approx 9{,}68$ (c)

Т.е. время полета 9,68с.

Тогда $S = x = v_0 t \cos\alpha = 50 \cdot 9{,}68 \cdot 0{,}5 = 242$ (м)

3) Hmax находим из ур. тр-рии как параболы:

$y_{max} = H_{max} = y(x_{max})$

$x_{max} = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{g}{\cancel{4}v_0^2\cos^2\alpha}}{\cancel{2}\,tg\alpha} = \frac{\frac{9{,}8}{\cancel{4}\cdot 2500 \cdot 0{,}25}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}} \approx 110{,}46 \Rightarrow$

$y_{max} = 40 + 110{,}46 \cdot \sqrt{3} - 0{,}00784 \cdot 110{,}46 \approx 136$ м

4) Найдем скорость:

$v_x = v_{x\,нач.} = 50 \cdot \cos 60^\circ = 25$ (м/с)

$v_y = gt$, $H = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow v_y = g \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} = 9{,}8 \cdot \sqrt{\frac{136 \cdot 2}{9{,}8}} \approx 51{,}63$ (м/с)

$v = \sqrt{57{,}63^2 + 25^2} \approx 57{,}36$ (м/с)

Ответ: $x = v_0 t \cos\alpha$;

$y = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$;

$y = h + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}$;

9,68 с;

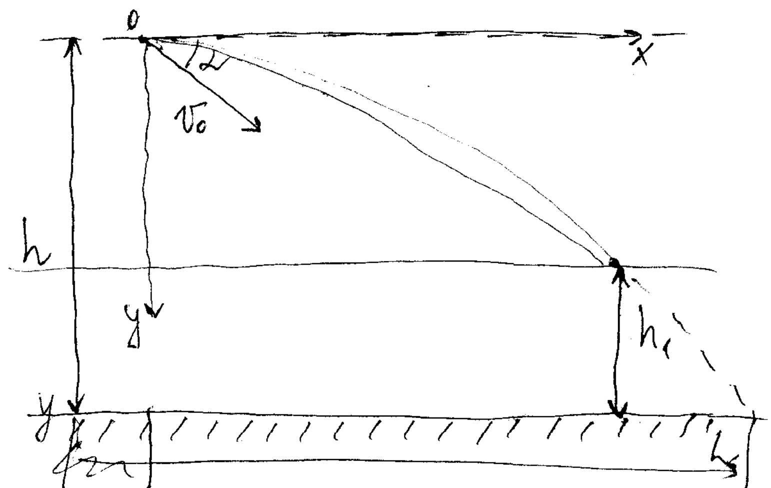
136 м;

242 м;

57,36 м/с.

13.02.03г. Семинар №2

№1



$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha\, t + \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

$$h^2 + h\,\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - h\,\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g} = 0$$

$$h_{1,2} = -\frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2hv_0^2\cos^2\alpha}{g}}$$

Берем с плюсом.

Проверка размерности:

$$\left[\frac{gx^2}{v_0^2}\right] = \left[\frac{м/с^2 \cdot м^2}{м^2/с^2}\right] = \left[\frac{м^3 \cdot с^2}{м^2 \cdot с^2}\right] = [м]$$

$$\left[\frac{h\,v_0^2}{g}\right] = \left[\frac{L \cdot L^2/t^2}{L/t^2}\right] = [L^2]$$

$$\left[\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2\right] = \left[\left(\frac{L^2/t^2}{L/t^2}\right)^2\right] = [L^2].$$

На $h_1 \Rightarrow y = h - h_1$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_x = V_0 \cos\alpha$$

$$V_y = V_0 \sin\alpha + gt$$

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2V_0 \sin\alpha\, gt + g^2t^2}$$

$$\cancel{h-h_1=}\ V_0 \sin\alpha \cdot t + \frac{gt^2}{2} - (h-h_1) = 0$$

$$t^2 + \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} t - \frac{2(h-h_1)}{g} = 0$$

$$t = -\frac{V_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2(h-h_1)}{g}}$$

II. $$v_y = \overbrace{v_0 \sin\alpha}^{v_{0y}} + gt$$

$$v_y^2 = v_0^2 \sin^2\alpha + g^2t^2 + 2v_0 gt \sin\alpha$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2v_{0y} gt + g^2t^2$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 \mp 2g\left(v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}\right)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 \mp 2g(h-h_1)$$

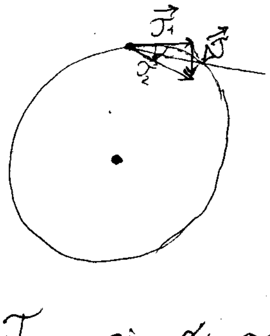
$$|V| = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2 + 2g(h-h_1)} = \sqrt{V_0^2 + 2g(h-h_1)}$$

$$tg\,\alpha = \frac{V_{0x}}{V_{0y}}$$

Формула ускорения при криволинейном движении.

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a} = (v \cdot \vec{\tau})' = v'\vec{\tau} + v \cdot \vec{\tau}\,' = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot v$$



$$\frac{\Delta\tau}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \tau$$

$$\tau = 1 \Rightarrow \frac{\Delta\tau}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\tau}{2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta\tau = \alpha$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t}\right) = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \cdot \lim \frac{\Delta l}{\Delta t} = v \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta l} = \frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d\vec\tau}{dt} = \frac{v}{R}\cdot\vec n \Rightarrow$$

$$\vec a = \frac{dv}{dt}\cdot\vec\tau + \frac{v^2}{R}\cdot\vec n$$

$$\vec a = \vec a_\tau + \vec a_n$$

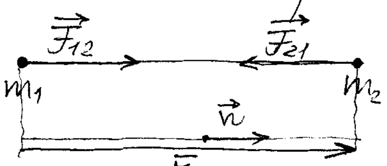
$$\vec a_\tau = \frac{dv}{dt}\cdot\vec\tau;\quad \vec a_n = \frac{v^2}{R}\cdot\vec n$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

3.02.03г.

Лекция №2

Закон всемирного тяготения.



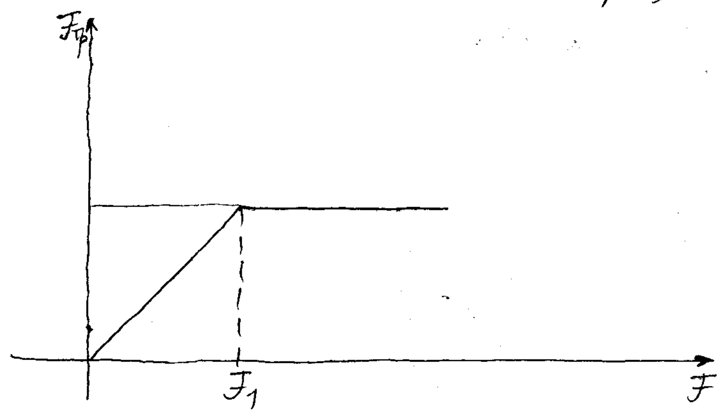
$$\vec F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r}$$

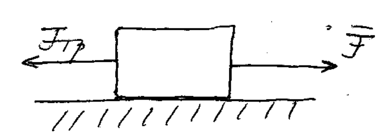
Закон был изначально сформулирован для точечных масс. Он выполняется для сферических тел для точек вне шара.

$$\vec F_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r}$$

$$F_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

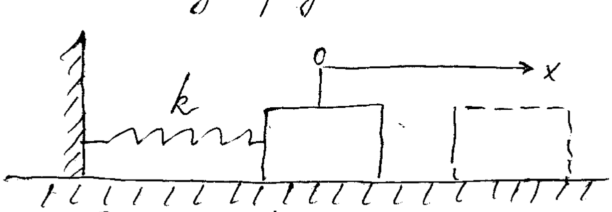
Если v мала, то $F_{тр} = \mu N$





$\vec F_{тр} = -\mu N\frac{\vec v}{v}$. При больших v $\mu \sim v$, для очень б. $\mu \sim v^2$

Сила упругости.



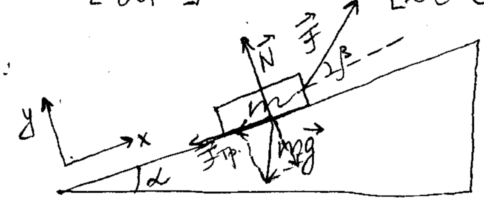
$$\vec F_{упр} = -k\vec x.$$

$G = 6.670 \cdot 10^{-11} \left[м^3 / кг \cdot с^2 \right]$

$F = ma \; [кг \cdot м / с^2] \; [Н]$

$\left[\frac{кг \cdot м}{с^2} \right] = [G] \cdot \left[\frac{кг^2}{м^2} \right] \Rightarrow [G] = \left[\frac{м^3}{кг \cdot с^2} \right]$

Пример:



Дано: F, α, β, μ, m
Найти: a
Решение:

$$F_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = -G \frac{mM}{R_з^2} \Rightarrow G \frac{mM}{R_з} = mg$$

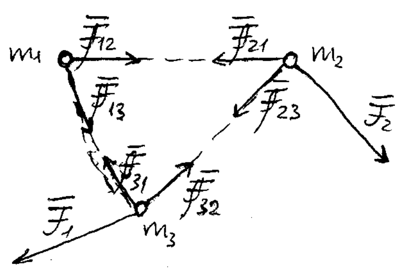
II закон Ньютона $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тр} + \vec{N} + \vec{F} + m\vec{g}$$

$$x: \; ma = -\cancel{F_{тр}} \mu N + F\cos\beta + mg\sin\alpha$$

$$y: \; 0 = N + F\sin\beta - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha - F\sin\beta$$

Механическая система тел.



$\bar{f}_{ij}$ — внутренние силы.
$\bar{F}_i$ — внешние силы.

$$\frac{d\bar{p}_1}{dt} = m_1 \bar{a}_1 = \bar{f}_{12} + \bar{f}_{13}$$

$$\frac{d\bar{p}_2}{dt} = m_2 \bar{a}_2 = \bar{f}_{21} + \bar{f}_{23} + \bar{F}_2$$

$$\frac{d\bar{p}_3}{dt} = m_3 \bar{a}_3 = \bar{f}_{31} + \bar{f}_{32} + \bar{F}_1$$

$$\bar{P}_{сист.} = \sum \bar{p}_i = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3$$

$$\frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt} + \frac{d\bar{p}_3}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3) \Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{P}_{сист}}{dt} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \sum \bar{F}_i$$

Скорость
Изменение импульса системы тел ($P_{сист.}$) равно сумме всех внешних сил, приложенных к телу.

$\frac{d\bar P_{сист.}}{dt} = \bar F_{рез}$

Закон сохранения импульса системы тел.

Система тел называется замкнутой, если она не взаимодействует с внешними телами. Ни на одно из тел замкнутой системы внешние силы не действуют.

Если $\bar F_{рез\ внеш} = 0$

1) $\frac{d\bar P_{сист}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar P_{сист.} = const$

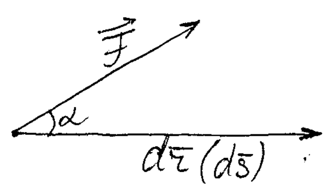
Импульс замкнутой системы тел, либо системы, для которой равнодейств. всех внешних сил равна 0, сохраняется, т.е. $\bar P_{сист.} = const$.

2) $\Delta \vec P_{сист.} = \bar F_{рез} \Delta t$ $(\Delta t \to 0)$

$\bar P_{сист.} \approx const$ при быстрых взаимодействиях.

3) $\bar F_{рез} \neq 0$, $F_{рез\,x} = 0$

$\frac{dP_{x\,сист.}}{dt} = 0$



Работа силы.

$dA = \bar F d\bar r$

$A = \int_1^2 \bar F d\bar r$ $\left(= \bar F \int_1^2 d\bar r\right.$ если $\left.\bar F = const\right)$

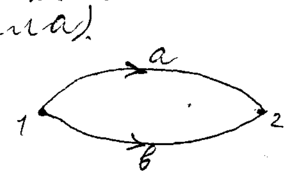
$P = \frac{dA}{dt}$ (мощность) $= \bar F \frac{d\bar s}{dt} = \bar F \cdot \bar v$ [Вт]

1) $A_{12} = 0$ - гироскопическая сила (напр. сила Лоренца).

2) $A_{12} = \int_1^2 \bar F d\bar r$ не зависит от вида траектории, а определяется только начальным и конечным положением.

Консервативная сила - сила, работа которой не зависит от вида тр-рии, а определяется только начальным и конечным положениями тела (потенциальная сила).

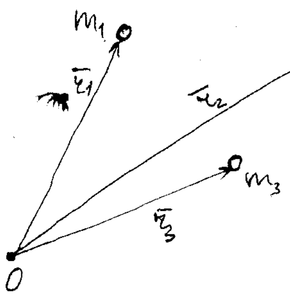
$A_{конс.\ по\ замкн.\ тр\text{-}рии} = 0$



$A_{1a2в1} = A_{1a2} + A_{2в1} = 0$, т.к. $A_{1a2} = -A_{2в1}$

3) Силы называются диссипативными, если их работа всегда отрицательна, т.е. $A_{12} < 0$.

Центр масс системы тел:



$$\bar R_c = \frac{\sum m_i \bar r_i}{\sum m_i}$$

$$\bar R_c = \frac{m_1\bar r_1 + m_2\bar r_2 + m_3\bar r_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$\bar R$ центра масс.

$$x_c = \frac{m_i x_i}{M_{сист}} \quad y_c = \frac{m_i y_i}{M_c} \quad z_c = \frac{m_i z_i}{M_c}$$

$$\bar v_c = \frac{d\bar R_c}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\bar r_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i};$$

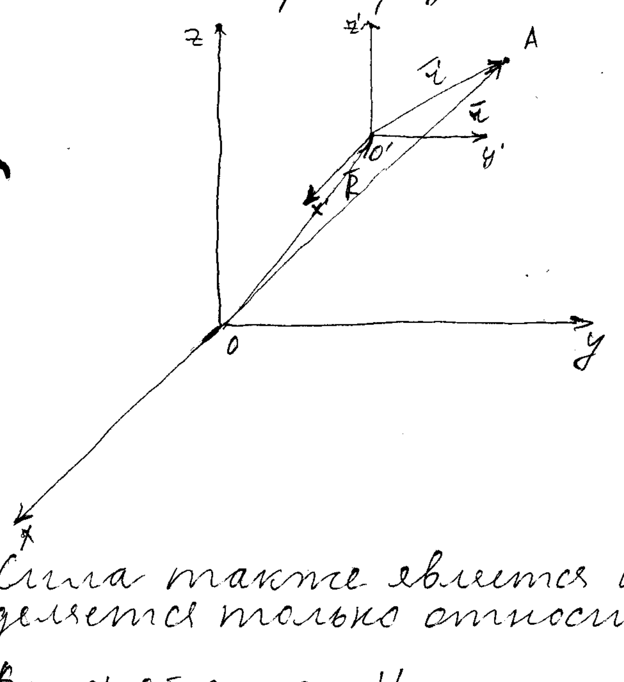
$$\bar v_c = \frac{\sum \bar p_i}{\sum m_i} = \frac{P_{сист.}}{\sum m_i} \Rightarrow \bar v_c \cdot M_{сист.} = \bar P_{сист.}$$

$$\frac{d\bar v_c}{dt} = \bar a_c \quad M_{сист.}\bar a_c = \frac{d\bar P_{сист.}}{dt} = \bar F_{внеш.}$$

т.е. $\boxed{M\bar a_c = \bar F_{рез}}$ теорема о движении центра масс.

Центр масс системы материальных точек движется как материальная точка с массой, равной массе системы, под действием всех внешних сил, приложенных к системе. Если $\bar F_{рез} = 0$, то центр масс покоится.

Преобразование Галилея.



$\bar v_0$ - ск. движ. x'y'z'O' const

$$\bar r = \bar r' + \bar R$$

$$\frac{d\bar r}{dt} = \frac{d\bar r'}{dt} + \underbrace{\frac{d\bar R}{dt}}_{=\bar v_0}$$

т.е. $\bar v = \bar v' + \bar v_0 \Rightarrow$

$\bar a = \bar a'$, т.е. ускорение не зависит от выбора инерц. системы координат, т.е. является инвариантом.

Сила также является инвариантом, т.к. она определяется только относит. положением тел.

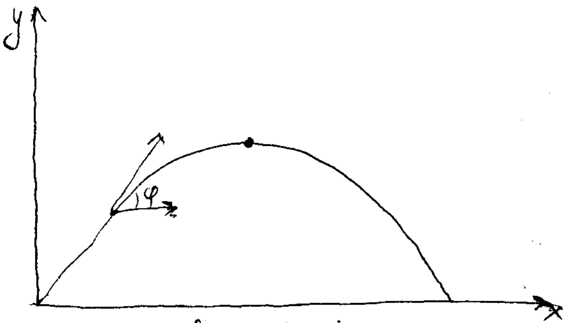
Второй закон Ньютона не зависит от выбора инерциальной сист. коорд.

Принцип относительности Галилея
(механич. пр-п относительности).

Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, следовательно, с помощью любых механических экспериментов, проведенных в замкнутой системе тел, нельзя установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно относительно какой-либо инерциальной системы отсчёта.

:02.03.

Семинар №3.
Кривизна кривой.



$$C = \frac{1}{R}$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx}$$

$$(tg\varphi)'_s = \boxed{\frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi} = y''_{xx}\frac{dx}{ds}}$$

$$\cancel{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1+(y'_x)^2$$

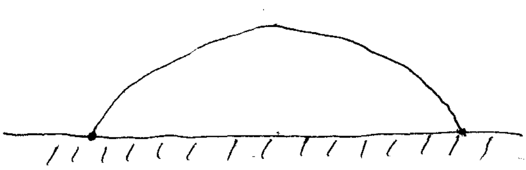
$$(1+(y'_x)^2)\frac{d\varphi}{ds} = y''_{xx}\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\cos^2\varphi} \Rightarrow (1+y'^2_x)\frac{d\varphi}{ds} = y''_x\sqrt{\frac{1}{1+y'^2_x}}$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{(1+y'^2_x)^{3/2}}{y''_x}.$$

Д/з. §2 Динамика мат. точки.
№3, 6, 13, 15, 20, 23, 26, 27, 28, 29.

2.11. Дано: $m = 5$ кг
$\alpha = 30^\circ$
$v_0 = 20$ м/с
Найти: $P_{\Delta p}$ за $t_{полета}$.
Решение:



1) $\vec{P} = m\vec{v}$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$

$m\vec{g}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$

$y = \Delta t v_0 \sin\alpha - \frac{g(\Delta t)^2}{2}, \quad y = 0 \Rightarrow$

$(\Delta t)^2 - \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 0;$

$\Delta t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

$mg \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \Delta(mv)$

$\Delta(mv) = 2mv_0 \sin\alpha$

$\Delta p = 2 \cdot 5 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 100$ кг·м/с

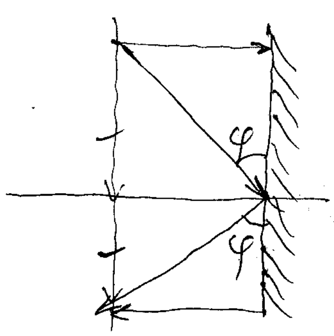
2) $mv_0 \sin\alpha$ – комп. p по y

$\Delta p = mv_0\sin\alpha - mv_0\sin\alpha + 2mv_0\sin\alpha = 2mv_0\sin\alpha$

$v_y = v_0\sin\alpha - g\Delta t$

$v_y = v_0\sin\alpha - g \cdot \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = -v_0\sin\alpha$

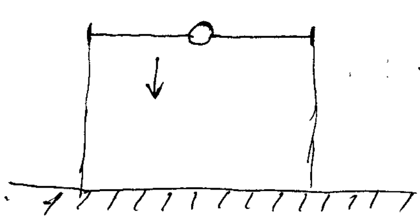
2.13. Решение:



$P_{рас.} = 2mv_0\sin\varphi$

$P_{ст.} = -2mv_0\sin\varphi$

2.17



$F = mg = \mu \cdot u$ ← ск. потока; $\mu = \frac{dm}{dt}$

$\mu u = u \cdot \left(\frac{\pi d^2}{4} \rho \cdot u\right) = \frac{u^2 \pi d^2 \rho}{4} = mg \Rightarrow u = \sqrt{\frac{4mg}{\pi d^2 \rho}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$

$u \approx 10{,}2$ м/с. Ответ: $10{,}2$ м/с.

Вывод формулы по р-сти:

$T = T(l, g)$

$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$, где k - безразм. const.

0.02.03. Лекция №3.

~~Работа сил.~~

~~Работой силы называется~~

Потенциальная энергия — по определению:

действуют консервативные силы.

1 2

$$\boxed{A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U} \quad (1)$$

0 $U = U_0 \ (U_0 = 0)$

$A_{10} = U_1 - U_0 = U_1$ / или $U_1 - C$

$U_0 = 0$ $\quad (U_0 = C)$

Потенциальная энергия пружины.

$F = -kx$

Пусть $U(0) = 0$

$A_{x0} = U(x) - 0$

$$dA = F dx \Rightarrow A = -\int_x^0 kx\,dx = +\frac{kx^2}{2}\Big|_0^x = \frac{kx^2}{2}.$$

Т.о. $U_{\text{сжатой пруж.}} = \frac{kx^2}{2}$, если $U(0) = 0$.

Потенциальная энергия в поле тяготения.

$F(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

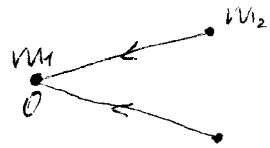
$U(\infty) = 0$

$dA = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr$

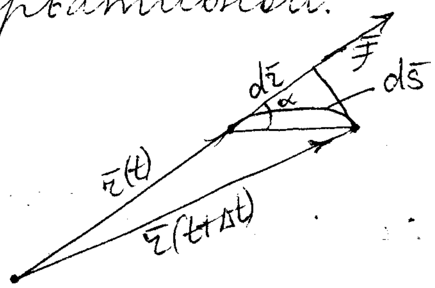
$$~~A~~ \ U(r) - U(\infty) = \int_r^\infty F dr = -\int_r^\infty G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \frac{G m_1 m_2}{r}\Big|_r^\infty = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

Центральные силы

— это силы, направленные в любой точке пространства по прямой, соединяющей эту точку с заданной точкой, называемой центром.



Докажем, что центральная сила является консервативной.



$$dA = \bar F d\bar s = F ds \cos\alpha = F_{(r)} dr$$

т.о. $A = \int_1^2 F dr = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$

И работа зависит только от r. Док-но.

Связь потенциальной энергии с консервативной силой.

Из (1) следует, что $dA = -dU(x,y,z)$

$$dA = \bar F(x,y,z)\, \underset{d\bar r(x,y,z)}{\underset{\parallel}{d\bar s(x,y,z)}} =$$

$$\bar F(x,y,z) = F_x \vec i + F_y \vec j + F_z \vec k$$

$$d\bar r(x,y,z) = dx\cdot\vec i + dy\cdot\vec j + dz\cdot\vec k$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \operatorname{grad} U \cdot d\bar r$$

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\vec j + \frac{\partial}{\partial z}\vec k\right) f(x,y,z)$$

$$\boxed{\bar F = -\operatorname{grad} U}$$

$$F_{упр} = -kx = F(x)$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{dU}{dx}$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$\int dU = -\int F(x)dx = \int kx\,dx = \frac{kx^2}{2} + C$$

$$F(0)=0 \Rightarrow C=0.$$

$$F_{тяг} = F(r)$$

$$\text{grad}\,U = \frac{dU}{dr}$$

$$dU = -\left(G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr\right)$$

$$U = Gm_1m_2\int\frac{dr}{r^2} = -G\frac{m_1m_2}{r} + C$$

$$\cancel{U(r)=\infty} \quad U(\infty)=0 \Rightarrow C=0$$

Кинетическая энергия.

$$dA = \bar{F}d\bar{r} = m\frac{d\bar{v}}{dt}d\bar{r} = m\frac{d\bar{v}}{dt}\bar{v}dt = m\bar{v}d\bar{v} = \frac{d(\bar{v}^2)}{2}m$$

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$d\bar{r} = \bar{v}dt$$

$$d(\bar{v}^2) = 2\bar{v}d\bar{v}$$

$$A = \frac{m}{2}\int_1^2 d(\bar{v}^2) = \frac{m}{2}\int_{v_1}^{v_2} d(\bar{v}^2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{mv^2}{2}}$$ – кинетическая энергия

$$T = \frac{p}{2m}, \text{ т.е. } T(\bar{v});\ T(p)$$

$$\boxed{E_{(p,\bar{r})} = T(p) + U(\bar{r})}$$ – полная механическая энергия. является ф-цией состояния.

Теорема об изменении кинетической энергии.

Изменение кинетической энергии системы тела равно работе всех сил, приложенных к данной системе.

$$A_i = \Delta E_{ki} = \Delta T_i$$

$$\Delta T = \sum \Delta T_i$$

Закон сохранения механической энергии

~~Механик~~

$T_2 - T_1 = A_{12}$

Пусть в замкн. системе действ. только консерв. или гироскопич. силы.

$A_{12} = U_1 - U_2$

$T_2 - T_1 = U_1 - U_2;$

$U_1 + T_1 = U_2 + T_2;$

$E_1 = E_2 = const.$

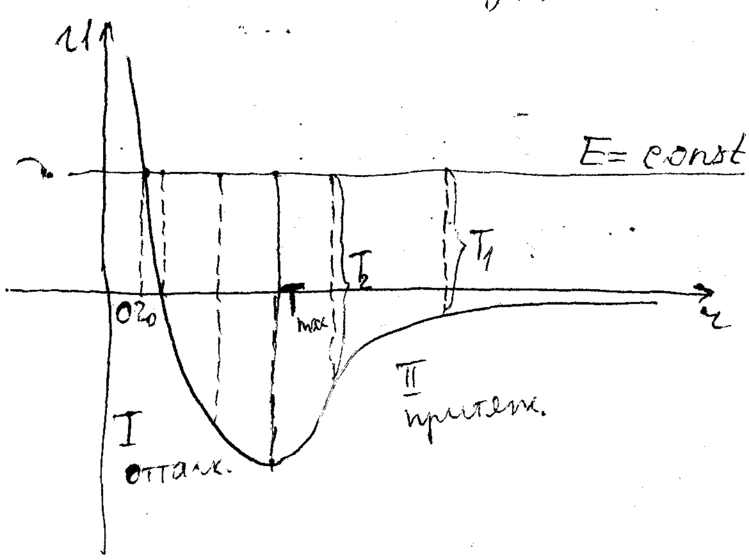
Закон сохранения E в механике.

В замкн. системе с одними только консервативными или гироскопическими силами полная механическая энергия остается неизменной. Могут только происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно, но полный запас энергии измениться не может.

Потенциальные кривые межмолекулярного взаимодействия.

Потенциал Леннарда-Джонса.

$$\boxed{U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}}$$ – приближенное описание взаим. двух молекул.



$T = E - U$

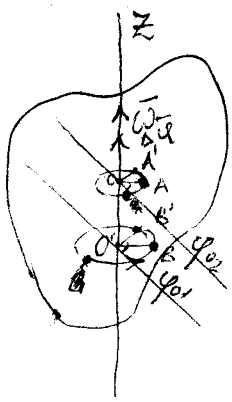
$F = -\frac{dU}{dr}$

Нарисов. зависимость $F(r)$

Внутренняя энергия.

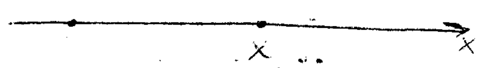
Кинематика вращательного движения.

Вращение тела относительно неподвиж. оси



$\Delta\varphi$

Поступ. движение:



$\bar v(t) = const$
$\bar a(t) = const$

$\Delta\varphi$ – изменение угла поворота. Оно одинаково у всех точек. Играет роль перемещения.
Аксиальный вектор – по правилу буравчика.

Поступательное (вдоль оси x)	Вращательное (отн-но неподвижн. оси)
$\Delta\bar x$	$\Delta\bar\varphi$
$\bar v = \frac{d\bar x}{dt}$	$\bar\omega = \frac{d\bar\varphi}{dt}$ (сонаправ. $\Delta\varphi$) $\bar\omega \uparrow\uparrow \Delta\bar\varphi$
$\bar a = \frac{dv}{dt}$ $\bar a \uparrow\uparrow \bar v$	$\bar\varepsilon = \frac{d\bar\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{\bar\omega}{\omega}$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$v = v_0 + at$	$\omega_z = \omega_0 + \varepsilon t$

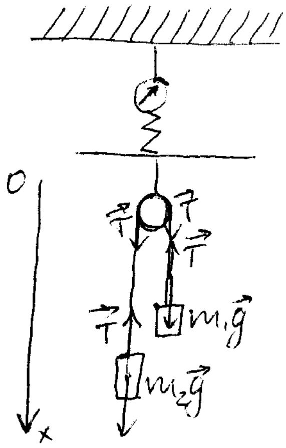
Шишмарёв Олег Домашняя работа. 23.02.0

А-12 §2 Динамика.

№3 Дано: $m_1 = 1,5$ кг
$m_2 = 3$ кг

Найти: показ. весов (F)

Решение:



Запишем второй закон Ньютона, учтя, что тела движутся с одинаковыми ускорениями:

$$\begin{cases} m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2\vec{a} \\ m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \text{проекция на } Ox$$

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ m_1 g - T = -m_1 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = m_2 g - m_2 a \\ T = m_1 g + m_1 a \end{cases}$$

Т.о. $m_2 g - m_2 a = m_1 g + m_1 a;$

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1)$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \Rightarrow$$

$$T = m_2 g - m_2 a = m_2 g - \frac{m_2^2 - m_1 m_2}{m_2 + m_1} g = - \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

Очевидно, что весы покажут удвоенную силу натяжения нити (точнее, ее модуль):

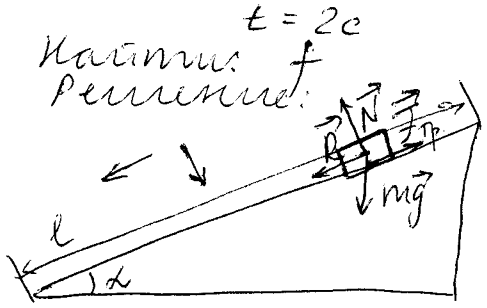
$$F_в = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g; \quad F_в = \frac{4 \cdot 1,5 \cdot 3}{3 + 1,5} \cdot 9,8 = 39,2 \text{ (Н)}$$

Ответ: 39,2 Н (или 4,00 кг).

№6 Дано: $\alpha = 25°$
$l = 2$
$t = 2$ с

Найти: f

Решение:



Второй закон Ньютона: $\vec{R} = \vec{F}_т + \vec{F}_{тр} + \vec{N}$

В проекциях:

на Ox: $ma = mg\sin\alpha - \mu N$

на Oy: $0 = +mg\cos\alpha - N \Rightarrow$

$N = mg\cos\alpha \Rightarrow$

$ma = mg\sin\alpha - f mg\cos\alpha;$

$a = g\sin\alpha - f g\cos\alpha$

$S = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2S}{t^2} \Rightarrow$

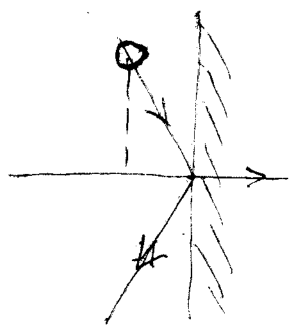
$g\sin\alpha - f g\cos\alpha = \frac{2S}{t^2};$

$\frac{g\sin\alpha - \frac{2S}{t^2}}{g\cos\alpha} = tg\alpha - \frac{2S}{gt^2\cos\alpha} = f$

$f = tg25^\circ - \frac{2\cdot 2}{9,8\cdot 2^2\cos 25^\circ} \approx 0,3537.$

Ответ: $f \approx 0,3537.$

№13 Дано: $m = 0,3$ кг
$v_0 = 10$ м/с
$\alpha = 30^\circ$
Найти: p_1 стенки
Решение:

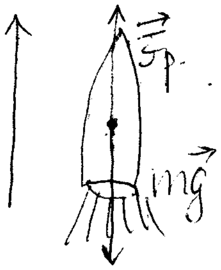


Шарик обладает импульсом
$\vec{p}_ш = m\vec{v}_0$
Или в пр-ции на x $p_ш = mv_0\sin\alpha$
При перемене направления
$p'_ш = -mv_0\sin\alpha$

Т.е. $\Delta p_ш = -mv_0\sin\alpha - mv_0\sin\alpha = -2mv_0\sin\alpha$, тогда
$p_{ст} = -\Delta p_ш = 2mv_0\sin\alpha;$
$p_1 = 2\cdot 0,3\cdot 10\cdot \frac{1}{2} = 3$ Н·с

Ответ: 3 Н·с.

№15 Дано: $m = 1000$ кг
$a = 2g$
$v_{стр} = 1200$ м/с
Найти: Q_m



$F_p = \frac{dm}{dt}\cdot u$, где $u = v_{стр}$.

$\vec{R} = \vec{F}_p + \vec{F}_T \Rightarrow$

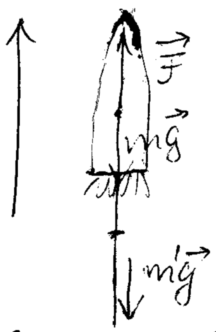
$ma = F_p - mg \Rightarrow$

$F_p = ma + mg \Rightarrow m(a+g) = \frac{dm}{dt}\cdot v_0 \Rightarrow$

$$Q_m = \frac{m(a+g)}{v_i} = \frac{1000\cdot(3\cdot 9,8)}{1200} \approx 24,5 \text{ кг/с}.$$

Ответ: 24,5 кг/с.

№20 Дано: $M = 6000$ кг
$F = 5\cdot10^5$ Н
$m_T = 10$ кг
$l = 1/4$
Найти: T, a
Решение:



1) $(M+m)\vec{a} = \vec{F} + (M+m)\vec{g}$

$(M+m)a = F - (M+m)g;$

$a = \frac{F}{M+m} - g$

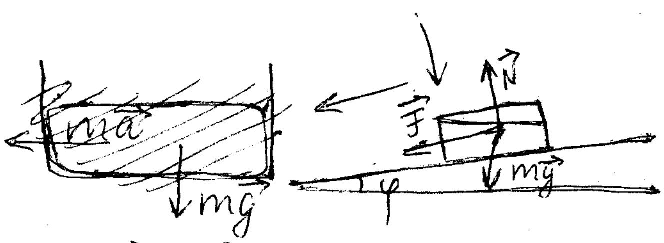
$a = \frac{5\cdot10^5}{10+6\cdot10^3} - 9,8 \approx 73,4$ м/с²

2) $\frac{3}{4}ma = -\frac{3}{4}mg + T$

$\frac{3}{4}\frac{m}{m+M}F = T \Rightarrow T = \frac{3}{4}\cdot\frac{10}{6010}\cdot 5\cdot10^5 \approx 624$ Н.

Ответ: 624 Н.

№ 230: $a = 0,7$ м/с²
Н: φ
Решение:



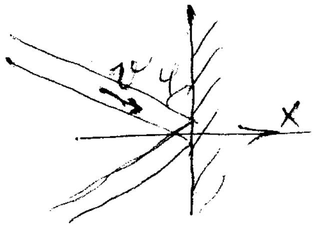
$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} \Rightarrow Ox: ma = mg\sin\varphi \Rightarrow$

$a = g\sin\varphi \Rightarrow$

$\varphi = \arcsin\frac{a}{g} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{0,7}{9,8} \approx 4,1°$

Ответ: $\varphi \approx 4,1°$.

№26 Дано: $\varphi = 60°$
$v = 20$ м/с
$S = 5$ см²
Найти: F
Решение:



Запишем импульс воды (~~в одну секунду~~):

~~$\vec{p} = m\Delta t\,\vec{v} = \rho S v^2$~~

$p_x = m v_x = \rho S v \cdot v \cdot \sin\varphi = \rho S v^2 \sin\varphi$

При отражении сост. $p_x = -\rho S v^2 \sin\varphi$

Т.о. $\Delta p = -2\rho S v^2 \sin\varphi \Rightarrow p_{ст.} = 2\rho S v^2 \sin\varphi$.

Но $m = \rho S \cdot x$, а $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$

$p_{ст.} = \frac{2\rho S\,dx\,v \sin\varphi}{dt}$, т.е. это сила:

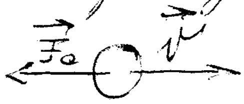
$F = \frac{dp}{dt} = 2\rho S v^2 \sin\varphi$

$F = 2 \cdot 1000 \cdot 0{,}0005 \cdot 400 \cdot \sin 60^\circ \approx 346{,}41$ Н

Ответ: 346,41 Н

1207 Дано: $m = 2\cdot 10^3$ кг
$v_{max} = 25$ м/с
$N = 5\cdot 10^4$ Вт
Найти: τ для $v_{max}/2$
Решение:

Т.к. $F_c \sim v^2$ и направл. в противополож. движ. сторону, то $F = -kv^2_{\cancel{max}}$



Согласно второму закону Ньютона

$F = ma$ или $F = m\frac{dv}{dt}$, т.о.

$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$

$-\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m}dt$

$\int\limits_{v_{max}}^{\frac{1}{2}v_{max}} -\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m}\int\limits_0^{\tau} dt$

$\frac{2}{v_{max}} - \frac{1}{v_{max}} = \frac{k\tau}{m} \Rightarrow \frac{1}{v_{max}} = \frac{k\tau}{m} \Rightarrow \tau = \frac{m}{k v_{max}}$

Определим k: при v_{max} $|\vec{F_c}| = |\vec{F}_{тяги}|$

$|\vec{F}_{тяги}| = \frac{N}{v_{max}}$; $|\vec{F_c}| = k v_{max}^2 \Rightarrow$

$\frac{N}{v_{max}} = k v_{max}^2 \Rightarrow k = \frac{N}{v_{max}^3} \Rightarrow \tau = \frac{m \cdot v_{max}^3}{N \cdot v_{max}} = \frac{m v_{max}^2}{N}$, т.о.

$\tau = \frac{2\cdot 10^3 \cdot 625}{5\cdot 10^4} = 25$ с.

Ответ: 25 с.

№28 Дано: $m = 10$ кг
$v_0 = 800$ м/с
$k = 0,25$ кг/с
Найти: τ до высшей точки.
Решение:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{g} + k\bar{v}$$

В пр-циях: $$-m\frac{dv}{dt} = mg + kv$$

$$-\frac{dv}{mg+kv} = \frac{dt}{m}$$

$$\frac{1}{k}\int_{v_0}^{0}\frac{d(mg+kv)}{mg+kv} = -\int_0^{\tau}\frac{dt}{m}$$

$$\frac{1}{k}\left(\ln(mg) - \ln(mg+kv_0)\right) = -\frac{\tau}{m};$$

$$\tau = \frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{10}{0,25}\cdot\ln\frac{98+0,25\cdot 800}{98} \approx 44,5\text{с}$$

Ответ: 44,5 с.

№29 Дано: $m = 100$ кг
$a = g/2$
$k = 10$ кг/с
Найти: Δt
Решение:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad ma = \frac{mg}{2} = mg - kv \Rightarrow kv = \frac{mg}{2};$$

$$V = \frac{mg}{2k}$$

$$\cancel{m\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{2}} \quad \frac{dv}{mg-kv} = \frac{dt}{m};$$

$$\frac{1}{k}\int_0^{\frac{mg}{2k}}\frac{d(mg-kv)}{mg-kv} = -\int_0^{\Delta t}\frac{dt}{m};$$

$$\frac{1}{k}\ln\left(mg - \frac{mg}{2}\right) - \ln(mg) = -\frac{\Delta t}{m};$$

$$\frac{\Delta t}{m} = \frac{1}{k}\ln(mg) - \ln\left(\frac{1}{2}mg\right);$$

$$\frac{\Delta t}{m} = \frac{1}{k}\ln 2 \Rightarrow \Delta t = \frac{m}{k}\ln 2, \text{ т.е.}$$

$$\Delta t = \frac{100}{10}\cdot\ln 2 \approx 6,93\text{с}$$

Ответ: 6,93 с.

7.12.03г. Семинар №4.

2.30. Дано: $m = 400$ кг
$F = 2000$ Н
$F_{сопр.} = -kv$
$k = 20$ кг/с
$\Delta t = 20$ с
Найти: v
Решение:

$$m\frac{dv}{dt} = F - kv$$

$$m\frac{dv}{F-kv} = dt;$$

$$-\frac{m}{k}\int_0^v \frac{d(F-kv)}{F-kv} = \int_0^{20} dt$$

$$-\frac{m}{k}\cdot \ln(F-kv) = \cancel{20}\,\Delta t$$

$$-\ln F + \ln(F-kv) = -\frac{\Delta t\cdot k}{m}$$

$$v = \frac{F}{k} - \frac{F}{k}\exp(-(k/m)\Delta t)$$

$$v = \frac{F}{k}\left(1 - e^{-\frac{k\Delta t}{m}}\right) = \frac{200}{20}\cdot\left(1 - e^{-\frac{20\cdot 20}{400}}\right) \approx 6{,}32\ (м/с)$$

Ответ: 6,32 м/с.

2.32 Дано: $v_0 = 800$ м/с
$t = 0{,}8$ с
$v = 200$ м/с
$m = 10$ г
$F_c = -kv^2$
Найти: k.
Решение:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

$$m\left(-\frac{dv}{v^2}\right) = k\,dt$$

$$-m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = k\int_0^t dt$$

$$\frac{m}{v} - \frac{m}{v_0} = kt$$

$$k = \frac{m(v_0 - v)}{t\,v\,v_0}$$

$$k = \frac{0{,}01\cdot 600}{0{,}8\cdot 200\cdot 800} \approx 4{,}7\cdot 10^{-5}\ кг/м$$

§2 № 36, 39, 64

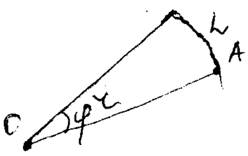
Ответ: $4{,}7\cdot 10^{-5}$ кг/м

36, 39, 64, 74, 76

Лекция №4.

27.02.03. **Динамика вращательного движения.**

Связь х-к вращательного и поступательного движ.



ℓ пост. — φ вращ.

$\varphi_{рад.} = \frac{\ell}{r}$ (рад.)

Т.о. $\ell = \varphi \cdot r$

$v = \frac{dl}{dt}$ по определению ⇒

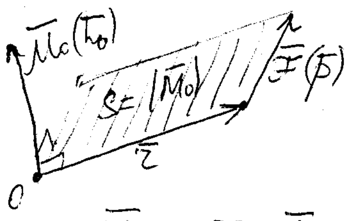
$$v = \frac{d}{dt}(r\varphi) = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

Т.е. $v = r \cdot w$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\frac{dw}{dt} = r\xi$$

Т.е. $a_\tau = r \cdot \xi$.

Момент силы относительно точки О

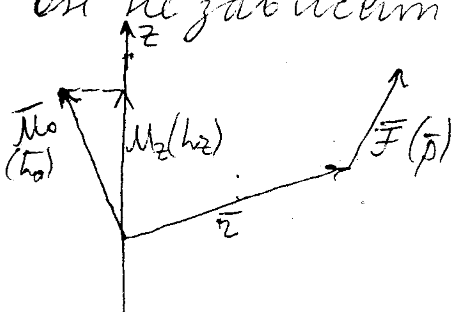


Т.о. $\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{F}$

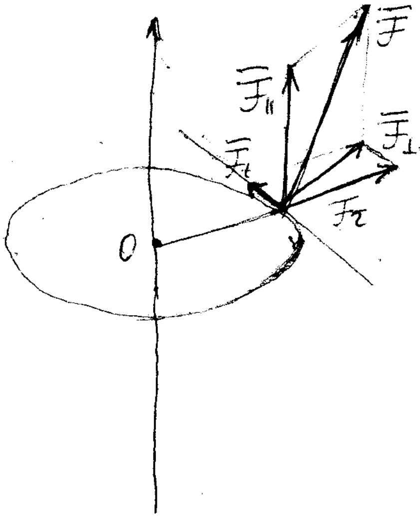
Момент импульса относительно точки о:

$\overline{L}_0 = \overline{r} \times \overline{p}$

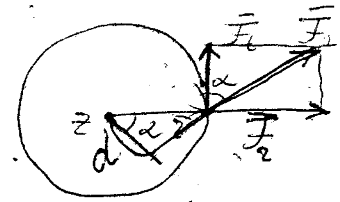
Момент силы относительно оси равен проекции момента силы относительно произвольной точки, взятой на оси, на данную ось. M_z
Он не зависит от выбора точки.



Момент количества движения относительно оси — аналогично (L_z).



Вид сверху:



$$M_z = M_{O_z} = [\bar r \cdot \bar F]_z = \bar r \times [(\bar F_\parallel + \bar F_\perp]_z = \underbrace{[\bar r \times \bar F_\parallel]_z}_{=0} + [\bar r \times \bar F_\perp]_z =$$

$$= [\bar r \times \bar F_t]_z + \underbrace{[\bar r \times \bar F_r]_z}_{0} = r F_t$$

$$M_z = r \cdot F_t = F_\perp \underbrace{r \cos\alpha}_{d - \text{плечо силы}} = F_\perp d$$

Момент сил от оси равен проекц. сост. перп. оси вращ. (лежа в пл. вращ.) на плечо. Плечо силы - это кратчайшее расстояние от ~~оси~~ ~~действующей силы~~ линии действия $F_\perp$ до оси вращения.

Второй закон Ньютона $\frac{d\bar p}{dt} = \bar F$

$$\bar r \times \frac{d\bar p}{dt} = \bar r \times \bar F$$

$$\frac{d}{dt}[\bar r \times \bar p] = \underbrace{\underbrace{\frac{d}{dt}\bar r}_{\bar v} \times \underbrace{\bar p}_{m\bar v}}_{0} + \bar r \times \frac{d\bar p}{dt} = \bar r \times \frac{d\bar p}{dt}, \text{ тогда}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{[\bar r \times \bar p]}_{\bar L_O} = \underbrace{\bar r \times \bar F}_{\bar M_O}$$

$$\frac{d\bar L_O}{dt} = \bar M_O$$

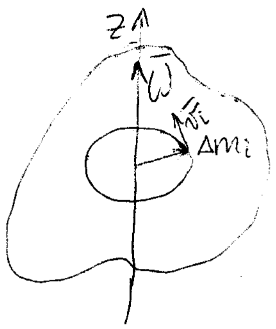
$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = M_z}$ – основной закон динамики вращательного движения для мат. точки

$$\frac{dL_{zi}}{dt} = \underset{\text{внешн. сил}}{M_{zi}} + \underset{\text{внутр. сил}}{M_{zi}}$$

Сумма моментов внутренних сил равна 0.

$$\frac{dh_{z1}}{dt}+\frac{dh_{z2}}{dt}+\ldots=M_{z1}+M_{z2}+\ldots$$

$$\frac{d}{dt}\sum h_{zk}=M_z$$ (результ. момент внешних сил)



$$\frac{dh_i}{dt}=M_i$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta m_i \overset{\omega r_i}{v_i} r_i)=\frac{d}{dt}(\Delta m_i\cdot\omega\cdot r_i^2)=$$

$$=\Delta m_i r_i^2\frac{d\omega}{dt}=M_i$$

Т.о. $$\boxed{\Delta m_i r_i^2\frac{d\omega}{dt}=M_i}$$

$$\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)\frac{d\omega}{dt}=M_z$$

↓ момент инерции

$$I_z=\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$$I_z\cdot\frac{d\omega}{dt}=M_z;$$

$$I_z\cdot\varepsilon=M_z \Rightarrow$$

$$\varepsilon=\frac{M_z}{I_z} \quad \text{и} \quad a=\frac{F}{m}.$$

Роль силы при вращ. движении играет момент силы, а роль массы — момент инерции.

ε — a
M_z — F
I_z — m

Момент инерции — это мера инертности тела при вращательном движении.

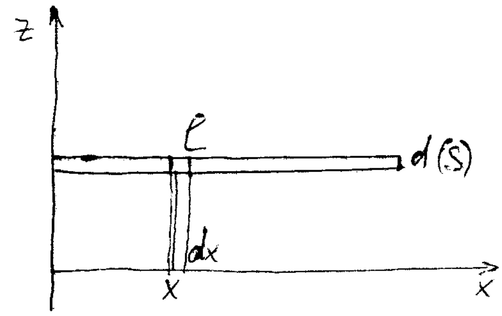
Кинетич. эн-гия при вращ. движении:

$$T=E_k=\sum\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}=\sum\frac{\Delta m_i r_i^2}{2}\omega^2 \Rightarrow$$

$$T=\frac{I_z\cdot\omega^2}{2} \quad \left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\begin{cases} p=mv \\ h_z=I_z\omega \end{cases}$$ — аналоги.

Вычисление моментов инерции.



l, M

$l \gg d$

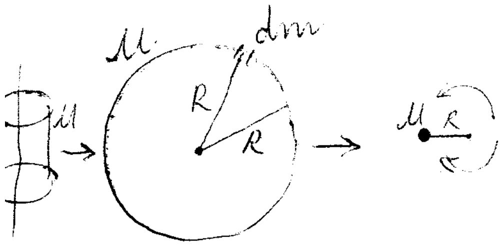
Т.о. $dJ = dm \cdot x^2$

$dm = \rho S dx$

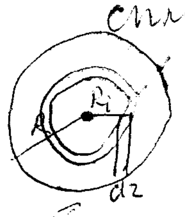
$dJ = \rho S x^2 dx$

$\int_0^J dJ = \int_0^l \rho S x^2 dx;$

$J = \rho \frac{S l^3}{3}, \quad \rho = \frac{M}{lS} \Rightarrow J = \frac{M l^2}{3}.$



$J_z = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 M$



$dJ(r) = \Delta m_i r^2$

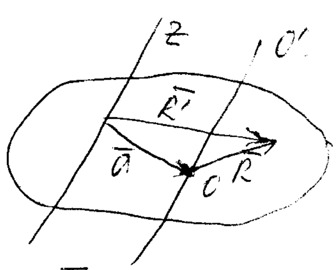
$\Delta m = \rho\, ds = \underset{ds}{\underline{2\pi r dr}}\,\rho$, ρ — масса на ед. площади

разобьём на круги

$dI_{(r)} = 2\pi r^3 dr \rho$

$J = \frac{\pi \rho R^4}{2}, \quad \rho = \frac{M}{\pi R^2} \Rightarrow J = \frac{M R^2}{2}.$

Теорема Штейнера.



$z \parallel OO'$ и $J_{OO'}$

J_z — ?

$\bar{R}_i' = \bar{R}_i + \bar{a}$

$J_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 =$, ~~$R \Delta m_i$~~

$= \sum \Delta m_i (\bar{R}_i + \bar{a})^2 = \sum \Delta m_i (\bar{R}_i^2 + 2\bar{R}_i \bar{a} + a^2) =$

$= I_0 + Ma^2$

$\sum \Delta m_i R_i$ -?

Центр масс: $R_ц = \frac{\sum \Delta m_i r_i}{M} = 0$ (т.к. начало координат)

Т.о. $\sum \Delta m_i R_i = 0$, ~~то~~ отсюда имеем:

$$\boxed{I_z = I_0 + Ma^2}$$

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту ин-ции тела отн-но оси, проходящ. через центр масс и парал. данной оси z, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

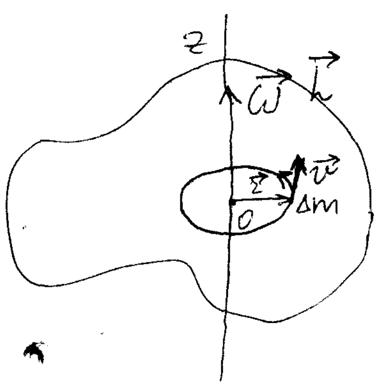
~~28.02.03.~~ ~~Домашняя работа.~~

6.03.03.

Лекция №5

Закон сохранения количества движения.

$\frac{dL_c}{dt} = M_{вн}$ | $L_0 = [\bar r \times \bar p]$



$L = \sum \Delta m_i \bar r_i \bar v_i$

$|L| = \sum \Delta m_i r_i v_i \ominus$

$v_i = \omega r_i$

$\ominus \sum \Delta m_i r_i^2 \cdot \omega = I_z \cdot \omega$

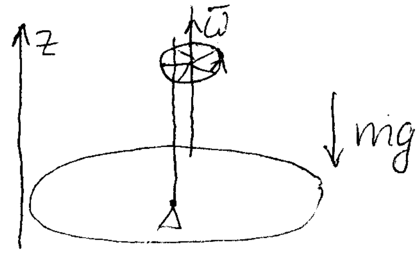
Т.о. $L = I_z \vec\omega$

1) Если $M_{вн}$ отн-но любой точке равен нулю, то $\bar L_{zc} = const$

2) $\Delta \bar L_{z,c} = \bar M_{вн} \Delta t$, $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta \bar L_{zc} \approx 0$, $\bar L_c = const$

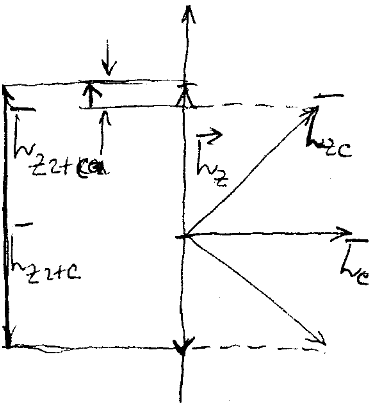
3) $\bar M_{вн} \neq 0$ $M_z = 0$, тогда $L_z = const$, т.е. именно относительно этой оси кол-во движения сохраняется.

Опыт со скамьей Жуковского:

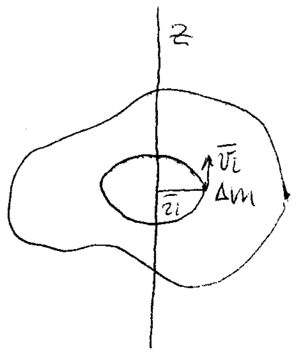


$L_z = const$

$\bar L_{кол.} = I_{кол.} \cdot \bar\omega$



Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.



$$T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$$

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_i r_i^2 = \frac{J_z\omega^2}{2}$$

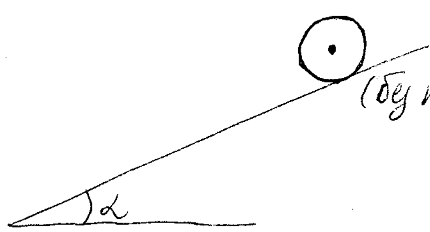
$$v_i = r_i\omega$$

$$\boxed{T = \frac{J_z\omega^2}{2}}$$

$$T = \frac{J_z^2\omega^2}{2J_z} = \frac{L^2}{2J}$$ (для пост. $\frac{p^2}{2m}$)

Произвольное движение абсолютно твердого тела.

Качение.



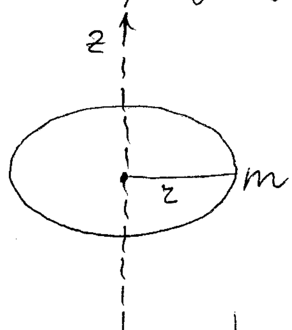
(без проскальзывания)

Теорема Кёнига.

Кинетическая энергия системы мат. точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической эн-гии той же системы в её относит. дв-нии по отношению к поступат. движущейся системе со скоростью центра масс и с началом координат в центре масс.

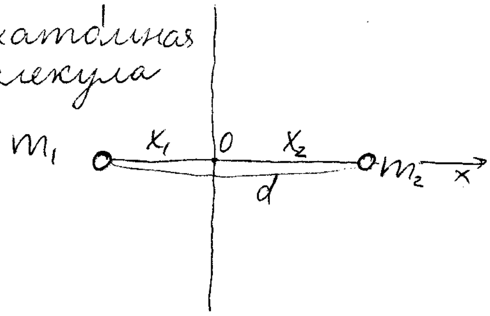
Жесткий ротатор как классическая модель двухатомной молекулы.

Жесткий ротатор — это мат. точка, вращающаяся вокруг неподвижной оси по орбите постоянного радиуса.



$$J_z = mr^2$$
$$h = J\omega$$

Двухатомная молекула



$m_1, m_2, d = const$

$$J_z = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2$$

$$\overline{R_c} = \frac{\sum m_i \overline{r_i}}{M}$$

Т.о. $R_c = \dfrac{-m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0$ (в данной сист. коорд.)

$$\begin{cases} m_1 x_1 = m_2 x_2 \\ x_1 + x_2 = d \end{cases} \qquad x_2 = d - x_1$$

$$m_1 x_1 = m_2 d - m_2 x_1;$$

$$x_1 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}; \quad x_2 = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2}.$$

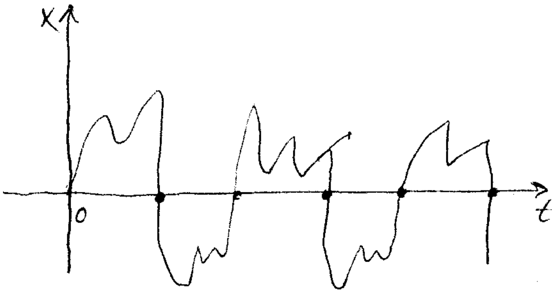
$$J_z = \frac{m_1 m_2^2 d^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 d^2}{(m_1+m_2)^2} = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}_{\text{привед. масса } \mu} d^2$$

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, т.о. $\boxed{J_{z_0} = \mu d^2}$

Кинематика гармонических колебаний.

Колебательное движение — это дв-ние, при котором тело через некоторые промежутки времени попадает в заданную точку.

Периодические колебания - это колебательное движение, при котором тело попадает в заданную точку через равные промежутки времени.



Гармонические колебания - это периодические колебания, происходящие по закону синуса или косинуса.

$x(t) = A\cos\underbrace{(\omega t + \varphi_0)}_{\text{фаза колебаний}}$, где A - амплитуда колебаний.

φ_0 - начальная фаза.

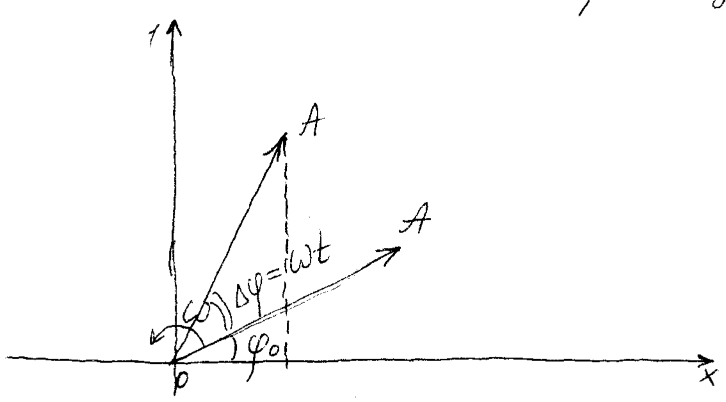
ω - циклическая частота: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, T - период

$\nu = \frac{1}{T}$ - частота колебаний; т.о. $\omega = 2\pi\nu$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Векторная диаграмма.



$\varphi = \omega t + \varphi_0$

$x(t) = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Комплексное представление гармонических колебаний.

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$x(t) = Re \cdot e^{i\cancel{\cos}(\omega t + \varphi_0)}$

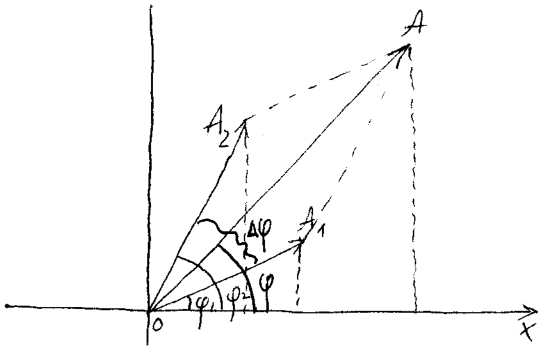
$x(t) = Re\, e^{i(\omega t + \varphi_0)}$

Сложение колебаний одного направления и одной частоты.

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$x = x_1 + x_2$



Из теоремы косинусов:

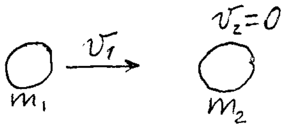
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Т.о. $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

13.03.03г. Семинар №5

№1.



неупругое столкновение.

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u;$

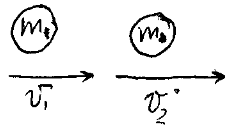
$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\underset{(\text{после столкн.})}{T_2} = \frac{m_1+m_2}{2}\cdot u^2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot T_1$$

$$U_{ст.} = T_1\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = T_1\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

Ответ: $E_{ст.} = \frac{m_2}{m_1+m_2}T_1.$

№2



$v_1 > v_2$

T_1, T_2 – изв.

Найти $T_2' - T_2 = (\Delta T)_2$

$$m\sqrt{\frac{2T_1}{m}} + m\sqrt{\frac{2T_2}{m}} = 2mu$$

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

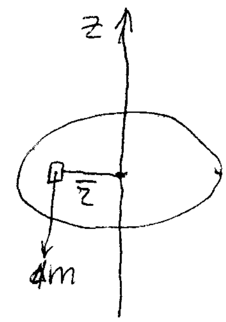
$$T_2' = \frac{mu^2}{2} = \frac{m(v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2)}{8} = \frac{T_1 + T_2}{4} + 2T_1T_2 = \frac{T_1 + 2\sqrt{T_1T_2} + T_2}{4}.$$

Ответ: $\Delta T = \frac{T_2 + 2\sqrt{T_1T_2} - 3T_1}{4}$, т.е. $T_2' - T_2 = \frac{T_2 + 2\sqrt{T_1T_2} - 3T_1}{4}.$

Вращательное движение.

$$\vec{L}_z = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$[L] = M\cdot\frac{L^2}{T}$$



$$dL_z = r\cdot dm\cdot v = |\omega r| = dm\cdot r^2\cdot\omega$$

т.о. $L_z = \sum r^2 dm\,\omega = \omega\cdot\underbrace{\sum dm\,r^2}_{I_z} = \cancel{\omega m r^2}$

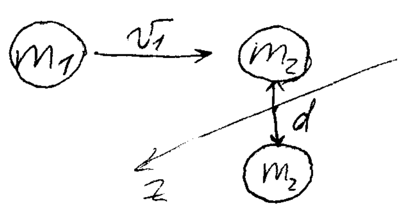
$$\boxed{L_z = \omega I_z}$$

$$\vec{M}_z = \frac{d\vec{L}_z}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\varepsilon = M_z$$

$$\boxed{M_z = I_z\varepsilon.}$$

№3



$$L_z = \omega I_z$$

$$I_z = \frac{m_2 d^2}{2}.$$

$$\underset{(m_2)}{u} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$$

Тогда $v_{\text{ц-ра масс}} = \frac{u}{2}$

В сист. коорд. связ. с центр. масс имеем вращение:

$$\frac{u}{2} = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{u}{2r} = \frac{u}{d}$$

$$\omega = \frac{2m_1 v_1}{d(m_1+m_2)}$$

$$L_z = \omega\frac{m_2 d^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_1 d.$$

Ответ: $L_z = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_1 d.$

13.03.03г.

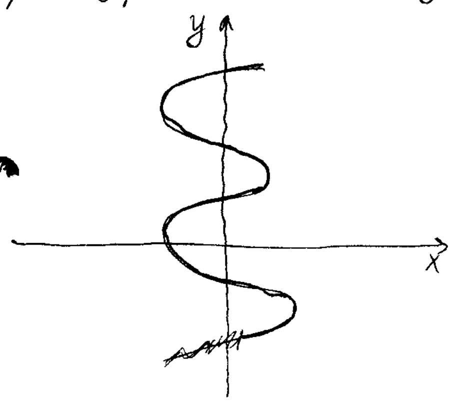
Лекция № 6

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ y &= B\sin\omega t \end{aligned}\right\}\ \text{парам. ур-ние эллипса}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \ \text{— аналит. ур-ние эллипса}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y &= B\cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}$$ т.о. при ~~разных~~ один. частотах результ. — эллипс.

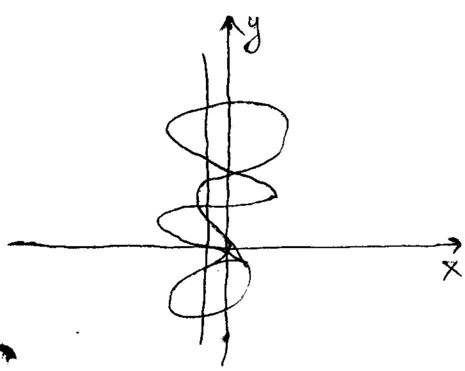
Если частоты разные, но кратные — получается фигура Лиссажу:



$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{\omega_y}{\omega_x},$$

где n_x и n_y — кол-во пересечений с осями x и y соответственно.

$n_x = 1$, $n_y = 4$

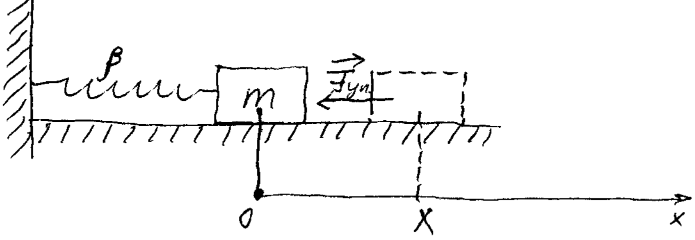


$n_x = 2$

$n_y = 8$

Динамика.

Пружинный маятник.



$$ma = -\beta x$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

$mx'' + \beta x = 0$ (классическое ур-ние).

$$x'' + \underbrace{\frac{\beta}{m}}_{\omega^2} x = 0 \quad (1)$$

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$, т.е. маятник будет совершать гармонические колебания со скоростью: $v = x' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)}{2}$$

$$U = \frac{\beta x^2}{2} = \frac{\beta A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi)$$

(сжатой пруж.)

Полная энергия маятника:

$$E = E_к + U = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi) + \frac{\beta A^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$m\omega^2 = \beta$ (из [1]).

Т.о. $\boxed{E = \frac{\beta A^2}{2}} = const.$

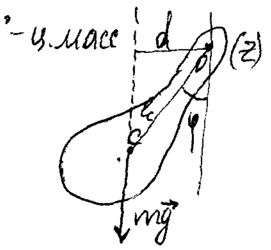
Частота колебаний $E_к$

$$E_к = \frac{mA^2\omega^2}{4}\left(1 - \cos(\underbrace{2\omega}_{\omega_1} t + 2\varphi)\right)$$

ω_1 – част. колеб. $E_к$, $\omega_1 = 2\omega$.

Физический маятник.
Математический маятник.

Ф.м. – абсолютно твердое тело, которое может совершать колебания относительно горизонтальной оси, непроходящей через центр масс.



Известны m, J_z, l_c

Найти ω, T

$$J_z \varepsilon = M_z = -l_c mg\sin\varphi$$

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}(\omega) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi''$$

$$J_z\varphi'' = -l_c mg\sin\varphi$$

$\varphi \to 0$, тогда $\sin\varphi \approx \varphi$

$$J_z\varphi'' + l_c mg\varphi = 0;$$

$$\cancel{J}\varphi'' + \underbrace{\frac{l_c m g}{J_z}}_{\omega}\varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl_c}{J_z}}$$

$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$, α - начальная фаза

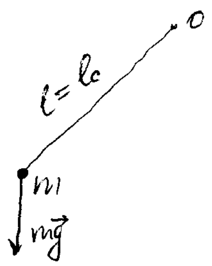
$$\omega_r = \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$E_к = \frac{J_z \omega^2}{2} = \frac{J_z \varphi_0^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{2}$$

$U =$

Период: $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega = \sqrt{\frac{mgl_c}{J_z}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgl_c}}$

Математический маятник – когда масса сосредоточена в одной точке.



$$J_z = ml^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебания которого равен периоду колебания данного физического маятника.

$\frac{J_z}{mgl_c} = \frac{l}{g}$; $l = \frac{J_z}{ml_c}$

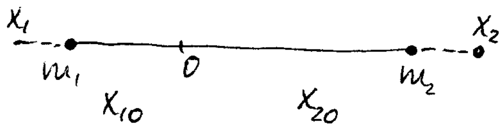
Двухатомная молекула как линейный гармонический осциллятор.

Пр.: пружинный маятник. $\omega = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$.

Квазиупр. сила – это сила любой физической природы, пропорциональная величине откл. от полож. равн.

$$M_z = -\underbrace{mgl_c}_{\text{квазиупр.}}$$

Для того, чтобы тело совершало незатухающие колебания, на него должна действовать квазиупругая сила



$$R_c = \frac{-m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} = 0; \Rightarrow \quad x_{10} m_1 = x_{20} m_2$$

$$(x_{10} + x_1) m_1 = (x_{20} + x_2) m_2$$

$$x_1 m_1 = x_2 m_2$$

Откл. $x = x_1 + x_2$

$$m_1 x_1'' = -\beta x$$

$$m_2 x_2'' = -\beta x$$

$$x_2 = x - x_1$$

$$x_1 m_1 = (x - x_1) m_2$$

$$x_1 (m_1 + m_2) = m_2 x$$

$$x_1 = \frac{m_2 x}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} x'' = -\beta x$$

$$\boxed{\mu x'' = -\beta x}$$

Затухающие гармонические колебания.

$$m x'' = -\beta x$$

незат. гарм. колеб. с част. $\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$

Пусть действует еще и сила сопротивл. $\sim v$:

$$m x'' = -\beta x - r x'$$

$$m x'' + r x' + \beta x = 0$$

$$x'' + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\delta} x' + \underbrace{\frac{\beta}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

$$x'' + 2\delta x' + \omega^2 x = 0 \qquad x = A e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

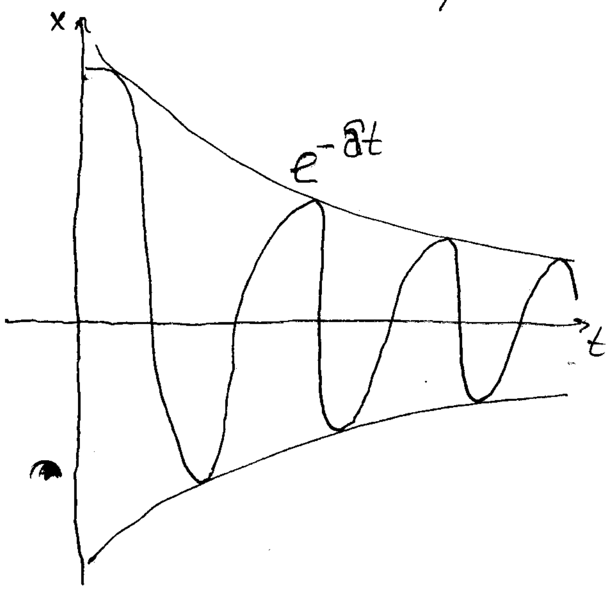
$$\omega_0^2 \gg \delta^2$$

$$\lambda = -\delta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}_{\omega}$$

ω – част. вынужд. колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$

$$x = Ae^{\lambda t}$$

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$$



$\omega_0 \gg \delta$, δ – коэффициент затухания.

Δ – логарифмический декремент затухания.

$$\Delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T$$

$$\boxed{\Delta = \delta T}$$

20.03.03г. ~~Домашняя работа.~~ Семинар №6

$\underset{m_1}{O} \xrightarrow{v_1} \quad O_{m_2}$ удар упругий.

$v_2' - ?$

Решение:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 (v_1')^2 + m_2 (v_2')^2 \,|\cdot m_1$$

$$m_1^2 (v_1')^2 = m_1^2 v_1^2 - m_2 m_1 (v_2')^2$$

$$(m_1 v_1') = m_1 v_1 - m_2 v_2'$$

$$m_1^2 (v_1')^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 (v_2')^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2'$$

Приравниваем:

$$-m_2 m_1 (v_2')^2 = -2m_1 m_2 v_1' v_2' + m_2^2 (v_2')^2$$

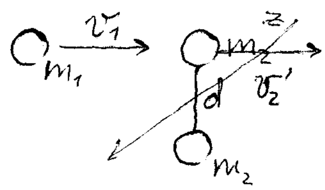
$$-m_1 v_2' = -2m_1 v_1 + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_2' + m_2 v_2' = 2m_1 v_1$$

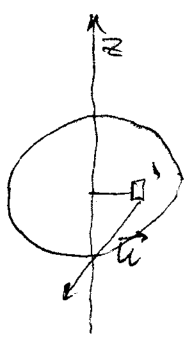
$$v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1+m_2}.$$

Ответ: $v_2' = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1+m_2}$

№2.



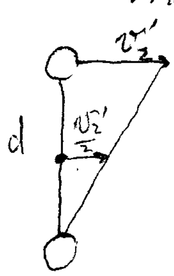
$L_z = \omega J_z$ $\quad K_{вр} = \int \frac{\rho v^2}{2} dV = \left| u = \omega r \right| =$



$$= \omega^2 \int \frac{\rho r^2}{2} dV = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

Т.о. $K_{вр} = \dfrac{J_z \omega^2}{2}$ или $K_{вр} = \dfrac{L_z^2}{2J_z}$

$v_2' = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1+m_2}$ $\qquad \dfrac{v_2'}{2} = \omega r$



$$\omega = \frac{v_2'}{2r}$$

Т.о. $\omega = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1+m_2} \cdot \dfrac{1}{d}$ $\qquad J_z = \mu d^2 = \dfrac{m_2 d^2}{2}$.

$$L_z = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_1 d.$$

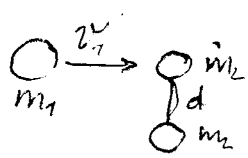
$$K_{вр} = \frac{I_z \omega^2}{2} = \frac{2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \cdot \left(\frac{m_1 v_1^2}{2}\right)$$

$K_{вр} = \dfrac{2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \cdot T_1$, где T_1 — кин. эн. I частицы до удара.

$$\frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{v_2'^2}{v_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\frac{4m_1^2 v_1^2}{(m_1+m_2)^2}}{v_1^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}$$

Т.о. имеем: $\dfrac{T_2'}{T_1} = \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}$.

№3



$$\Delta T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{4 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = T_1 \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

20. 03. 03г.

Лекция №7

$$m\ddot{x} = -\beta x$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$$ свободные незатухающие колебания

$$m\ddot{x} = -\beta x - r\dot{x}$$

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$ затухающие колебания.

$$\frac{\beta}{m} = 2\delta$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Вынужденные колебания.

$$m\ddot{x} = -\beta x - r\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$$

$$x'' + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\delta}x' + \underbrace{\frac{\beta}{m}}_{\omega_0^2} = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{f_0}\cos(\omega t)$$

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 = f_0\cos(\omega t)$$

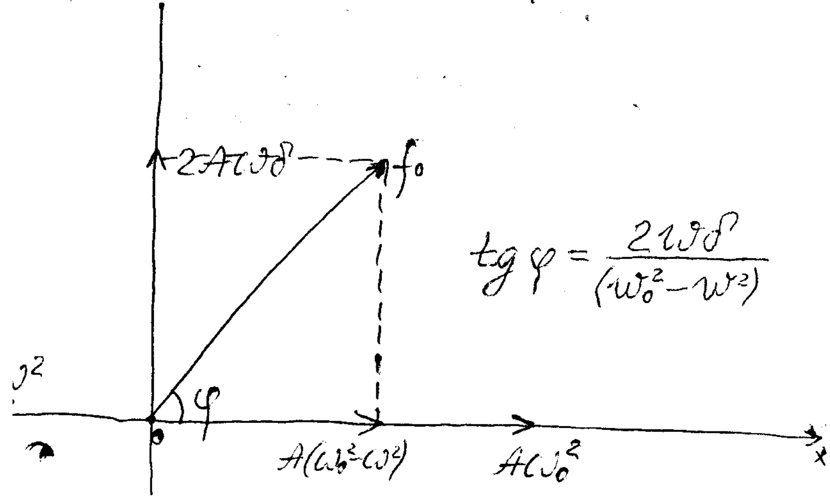
$$x = \underbrace{x_{oo}}_{\text{общее одн}} + \underbrace{x_{чн}}_{\text{частн. неодн.}}$$

Т.к. колебания устойчивые, то x_{oo} отбрасываем и $x = x_{чн}$

Будем искать реш. в виде: $x = A\cos(\omega t - \varphi)$

$$x' = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x'' = -A\omega^2\cos(\omega t - \varphi) = A\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega\delta}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$f_0 = A\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\delta^2}}$$

Явление резонанса. Максимальная амплитуда.

$$A' = -2(\omega_0^2-\omega^2)\cdot 2\omega + 8\delta^2\omega = 0$$

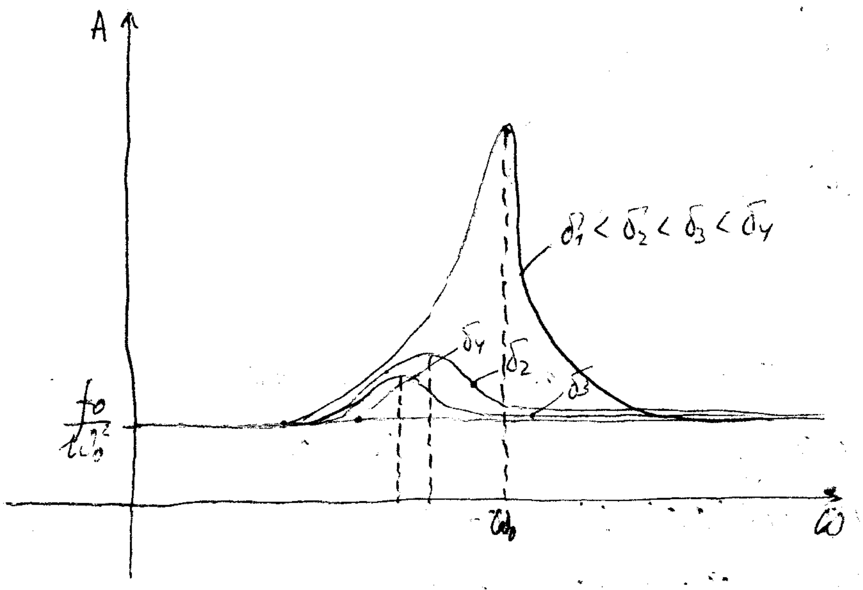
$$-\omega_0^2+\omega^2+2\delta^2=0$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2}$$ — резонанс.

Как правило, $\omega_0^2 \gg 2\delta^2$, а соотв. $\omega \approx \omega_0$

Тогда $\boxed{A_{рез} \approx \frac{f_0}{2\omega_0\delta}}$ — максим. амплитуда

$$\boxed{A_0(\omega=0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}}$$



С увеличением δ максимум смещается в сторону низких частот

Добротность Q показывает, во сколько раз при небольших затуханиях δ амплитуда при резонансе превышает смещение из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины

$$Q = \frac{f_0\,\omega_0^2}{2\delta\omega_0 f_0} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\delta T}$$

$\delta T = \Delta$ - логар. декр. затух.

Т.о. $\boxed{Q = \frac{\pi}{\Delta}}$

Волны.

Волна — это процесс распространения колебаний в пространстве.

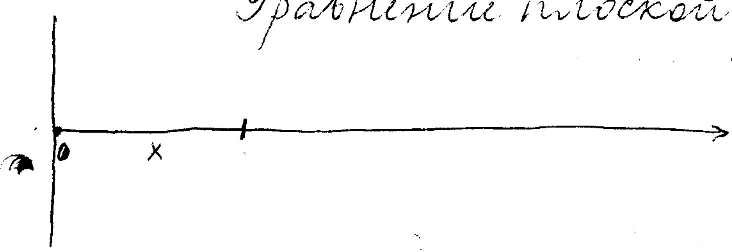
Фронт волны – это геометрическое место точек, до которых в данный момент времени дошел колебательный процесс.

Волновая поверхность.
~~Волновая~~ ~~Фронт волны~~ – это геометр. место точек, колеблющихся в одной фазе.

Продольные ~~колебания~~ волны – это волны, в которых колебания происходят в направлении распространения волны.

Поперечные волны – это волны, в которых колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

Уравнение плоской бегущей волны.

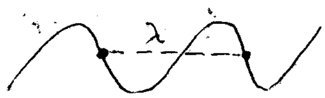


$\xi(0) = A\cos\omega t$

v – скорость распр. колеб. в среде, $v = const$.

$t' = \frac{x}{v}$ $\quad \xi(x,t) = \xi_0(t-t') = A\cos(\omega(t-t')) = A\cos(\omega t - \frac{\omega x}{v})$

Длина волны λ:



$\lambda = v \cdot T$

Волновое число $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{2\pi}{v t} = \boxed{\frac{\omega}{v} = k}$

определение

Тогда $\boxed{\xi(t,x) = A\cos(\omega t - kx)}$

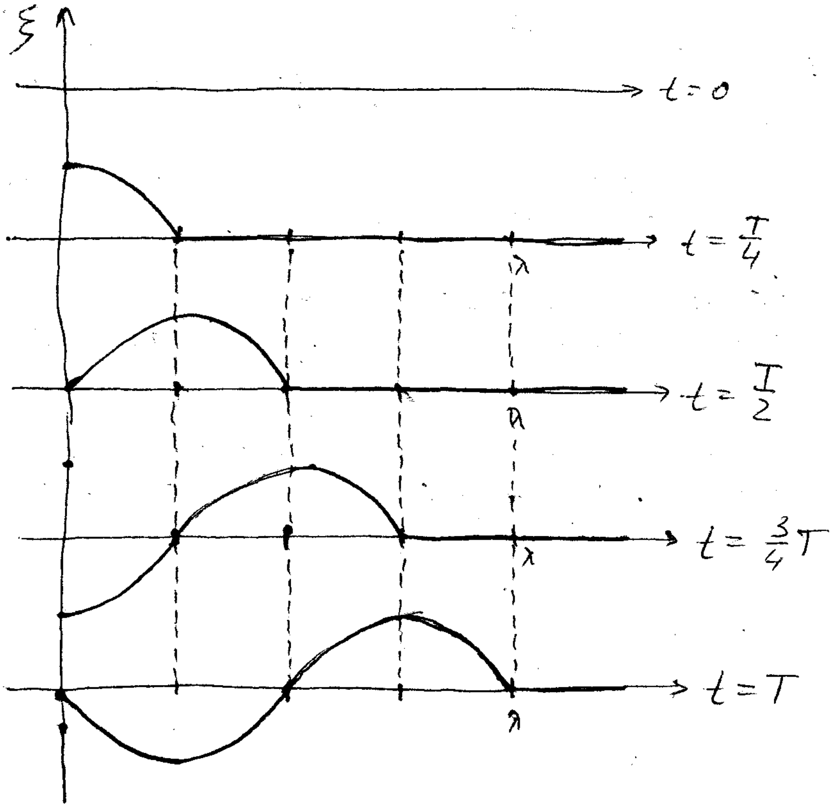
Классическое ур-ние плоской волны.

$x = x_1 \quad \xi(t,x_1) = A\cos(\omega t - kx_1)$

$t = t_1 \quad \xi(t_1,x) = A\cos(\omega t_1 - kx)$ или

$\xi(x,t) = Re\, A e^{i(\omega t - kx)}$

Графическое изображение волны.



Дифференциальное волновое уравнение

$$\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=-A\omega\sin(\omega t-kx) \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}=Ak\sin(\omega t-kx)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos(\omega t-kx) \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-Ak^2\cos(\omega t-kx)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\cdot\frac{\omega^2}{k^2}\ ; \quad \frac{\omega}{k}=v\ ;$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0\\ \frac{\partial^2\xi}{dt^2}-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0\end{gathered}}$$

– дифференциальное ур-ние волны.

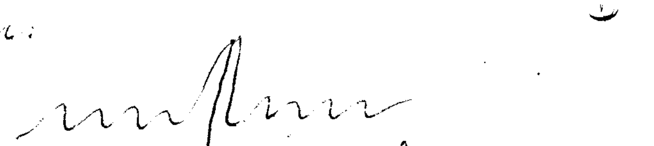
Фазовая скорость.

$$\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$$

$$\omega-kv=0$$

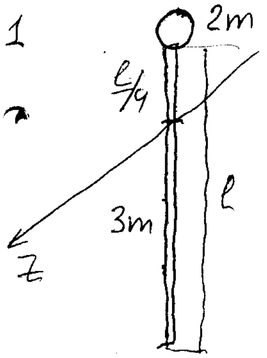
$$v=\frac{\omega}{k}$$

Картина наложения волн:



03.03г. Семинар № 7.

№1



Найти: ν

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\,l_c}{J_z}}$$

$$M = 5m$$

$$J_z = J_{z\,ст.} + J_{z\,шар.}$$

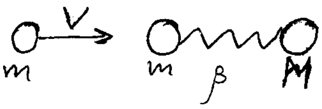
$$J_{zш} = m_ш \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{ml^2}{8}$$

$$J_{z\,ст} = M_{ст} \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2 + M_{ст}\frac{l^2}{12} = 3m\frac{l^2}{16} + 4m\frac{l^2}{16} = \frac{7}{16}ml^2 \Rightarrow J_z = \frac{9}{16}ml^2$$

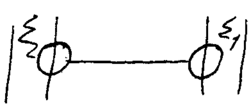
$$l_c = \frac{3m\frac{l}{4} - 2m\frac{l}{4}}{3m+2m} = \frac{l}{20}.$$

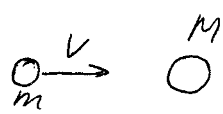
$$\omega = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

№2



$$F = -kx = -\frac{\partial U}{\partial x}, \text{ т.е. } U = \frac{kx^2}{2}$$





$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

$$\xi = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$V_2' = \frac{2m}{m+M}V$$

$$mV = mV_1' + MV_2'$$

$$V_1' = \frac{m-M}{m+M}V$$

//

1. $mV = (m+M)V_{ц.м.}$;
или
до стенки.

$$V_{ц.м.} = \frac{mV}{m+M}$$

$$E_{кол.} = \frac{mV^2}{2} - \frac{(m+M)V_{ц.м.}^2}{2} = \frac{mV^2}{2} - \frac{M+m}{2}\cdot\frac{m^2V^2}{(M+m)^2} =$$

$$= \frac{mV^2}{2} - \frac{m^2V^2}{M+m}\cdot\frac{1}{2} = \frac{MmV^2}{2(M+m)} = \frac{V^2}{2}\cdot\underbrace{\left(\frac{Mm}{M+m}\right)}_{\mu}$$

$$E_{кол.} = \frac{\mu V^2}{2}$$

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0;\quad \mu\ddot{\xi} + \beta\xi = 0, \text{ т.о. } \omega^2 = \frac{\beta}{\mu}, \text{ т.е. } \omega = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$$

или $\omega = \sqrt{\frac{\beta(m+M)}{mM}}$

$E_{кол} = \frac{\mu V^2}{2} = \frac{\beta A^2}{2}$, т.о. $A = V\sqrt{\frac{mM}{\beta(m+M)}}$.

№3. То же с абсолютно неупругим столкновением.

$$mV = (2m+M)\cdot V_{ц.м.}$$

$$V_{ц.м.} = \frac{mV}{2m+M} = \frac{m}{2m+M}V$$

$$E_{кол} = \frac{mV^2}{2} - \frac{m^2V^2}{2(2m+M)} = \frac{m(m+M)V^2}{2m+M}\cdot\frac{1}{2} = \frac{V^2}{2}\cdot\frac{m(m+M)}{2m+M}.$$

Т.о. $\mu_1 = \frac{m(m+M)}{2m+M}$; $\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{\beta(2m+M)}{m(m+M)}}$

$$A = V\sqrt{\mu} = V\sqrt{\frac{m(m+M)}{\beta(2m+M)}}$$

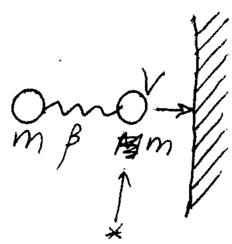
№4 То же, но m продолжает лететь со ск $V_{ц.м.}$ не слипаясь.

~~mV=~~ $\mu = \frac{m+M}{m+M}$; $\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$

$E_{кол.} = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_ц^2}{2} - \frac{(m+M)V_ц^2}{2} = \frac{m(m+M)}{2m+M}\cdot\frac{V^2}{2}$, т.о.

Имеем полный аналог (3): $\omega = \sqrt{\frac{\beta(2m+M)}{m(m+M)}}$; $A = V\sqrt{\frac{m(m+M)}{\beta(2m+M)}}$.

№5



Абсолютно упругое столкновение.

$$E_{кин.} = \frac{2mV^2}{2} = mV^2$$

$E_{кол} = mV^2$ (т.к. молекула остановилась).

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} = \sqrt{\frac{\beta}{m/2}} = \sqrt{\frac{2\beta}{m}}.$$

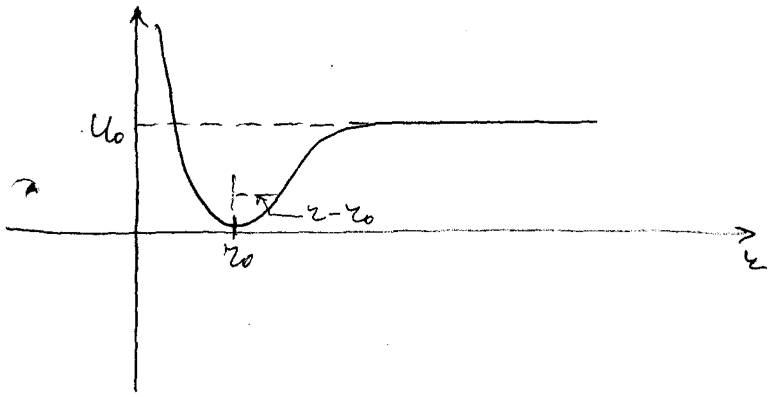
$$A = V\sqrt{\frac{\mu}{\beta}} = V\sqrt{\frac{m}{2\beta}}.$$

№6. То же с прилипанием к стене.

Тогда имеем обычный пружинный маятник.

$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$; $A = V\sqrt{\frac{m}{\beta}}$; $E_{кол.} = \frac{mV^2}{2} = \frac{\beta A^2}{2}$.

№7.



$\mu(r) = U_0\{1 - \exp[-\alpha(r - r_0)]\}^2$ – потенциал Морзе.

Разложение в ряд Тейлора

$$U(r) = U(r_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_0}(r-r_0) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)\Big|_{r=r_0}(r-r_0)^2 + \ldots$$

$$\frac{U(r)}{U_0} = e^{-2\alpha r} - 2e^{-\alpha r}$$

$U(r) = 4U_0\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} + \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6\right]$ – потенциал Ленарда-Джонса.

$U(r) = -2U_0\left[\frac{\sigma}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2\right]$ Крадсена(?)

Найти r_0, β

27.03.03г. Лекция №8.

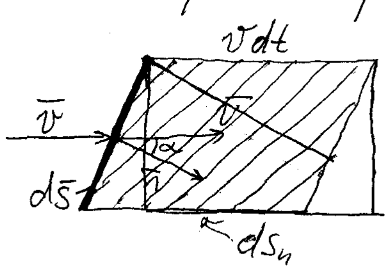
$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

$$E = E_{кин\,max} = E_{пот.\,max} = const.$$

$$E = \frac{mv_{max}^2}{2}$$

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

Энергия, переносимая волной.



dW – поток энергии, который проходит через произвольную площадь ds за время dt

$$dW = \xi n\,dV = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cdot\underbrace{n\,dV}_{dN}$$

(ξ – энергия одной молекулы, начавшей колебаться).

Объемная плотность энергии:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{A^2\omega^2}{2} mn = \frac{A^2\omega^2}{2}\rho$$

Поток энергии через площадь ds:

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \frac{w v\, dS_n\, dt}{dt} = w \cdot v\, dS_n$$

$$dV = v\, dt\, \underbrace{ds \cos\alpha}_{dS_n}$$ — площадь перпенд. скорости.

Вектор Умова: $I = w \cdot v$

$$\boxed{\bar{I} = w \cdot \bar{v}}$$

Вектор Умова (I) по величине равен потоку энергии, переносимой волной через единичную площадку, перпендикулярную скорости распространения волны.

Стоячая волна:

– образуется при отражении волны от какого-либо препятствия.

$$\xi = A\cos(\overrightarrow{\omega t - kx}) + A\cos(\overleftarrow{\omega t + kx}) = 2A\cos kx \cos\omega t$$

$$\boxed{\xi = 2A\cos kx \cos\omega t}$$

$$A = A(x) = 2A\cos kx$$

Точки, в которых $A = 0$, являются узлами стоячей волны.

Узлы ($\xi = 0$) $\quad \cos kx = 0$

$$kx = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right);$$

$$x = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda n}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

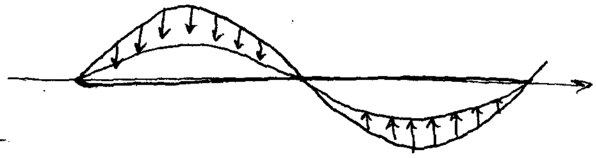
или $x = \frac{\lambda}{4}(2n+1)$.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

$$\cos kx = \pm 1$$

$$kx = \pi n$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \pi n = \frac{\lambda n}{2}, \text{ т.о. } \Delta x = \frac{\lambda}{2}$$



Все точки между узлами будут колебаться в фазе, но с разными амплитудами.

При переходе через узел фаза колебания изменяется на $\cancel{2}\pi$.

Бегущая волна переносит энергию, а стоячая — нет

Принцип суперпозиции волн.

Если в среде распространяются одновременно несколько волн, то колебания частицы среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

Термодинамика и молекулярная физика.

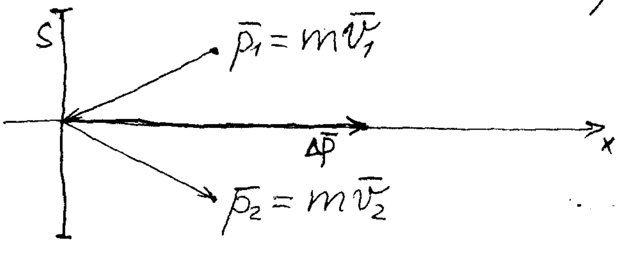
$n_л = 9{,}7 \cdot 10^{19}$ мол. $\cdot \frac{1}{см^3}$

$\langle v \rangle \approx 500$ м/с

$\langle \lambda \rangle = 10^{-5}$ см

длина пробега

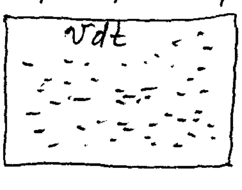
Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.



$|\bar{v}_1| = |\bar{v}_2| = v$

$\frac{d\bar{P}_{сист.}}{dt} = \bar{F}$

$\Delta\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = 2p_x = 2mv_x$

S 

$\Delta p = 2mv_x N$, где N — число ударивш. мол. за время dt

$N=\frac{1}{2} n v_x \Delta t S$ n- число молекул в ед. объема.

т.к. полов. молекула движ. в др. ст.

Т.о. $\Delta \bar{P} = 2 m v_x N = m v_x^2 S \Delta t n$

$$\frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t} = m v_x^2 S n = m \frac{v^2}{3} S n = \frac{m v^2}{2} \cdot \frac{2}{3} S n$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle \rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

$p = \frac{F}{S} = \frac{2}{3} \cdot \frac{m v^2}{2} = \frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle$ (среднее зн-ние кин. эн-гии поступ. движения)

1) $p = \frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle n$

$p V_{моль} = RT$

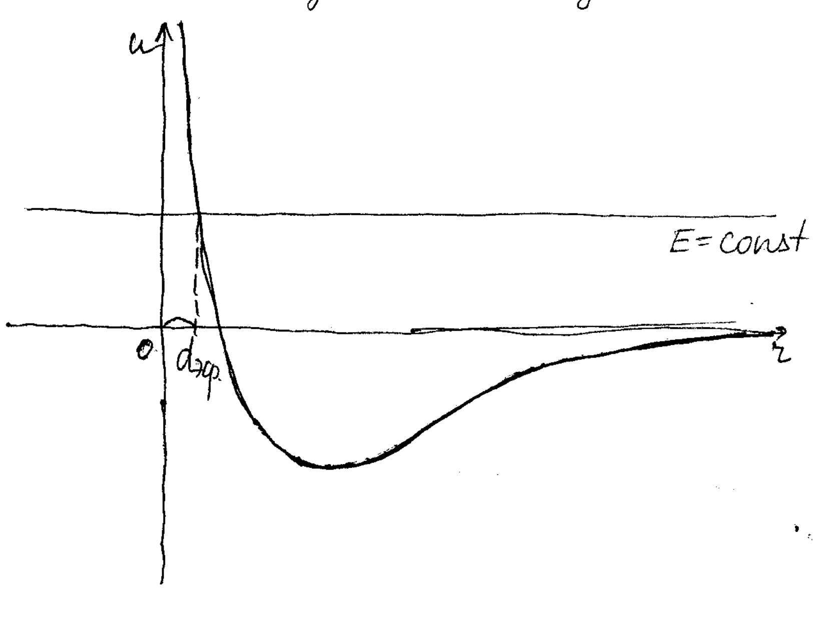
$V_{мол.} = \frac{N_a}{n}$

$p \frac{N_a}{n} = RT \Rightarrow p = nkT$

Т.о. $\frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle n = nkT$

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT}$$

Идеальный газ в силовом поле.

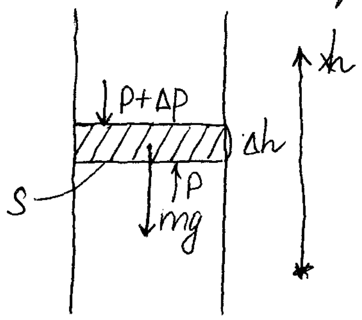


$E_к(T) = E - U.$

Для идеального газа расстояния между молекулами столь велико, что потенц. энергией взаимод. можно пренебречь. и они много больше размеров самих молекул.

Эффективный диаметр – это наименьшее расстояние, на которое могут сблизиться центры молекул.

~~Гравит~~ Рассмотрим гравитационное поле.



$$p\cdot S-(p+\Delta p)S-mg=0$$

$$m=\rho\Delta h S$$

$$pS-pS-\Delta pS-\rho\Delta h S\cdot g=0$$

$$\Delta p=-\rho g\Delta h$$

$$pV=\frac{m}{\mu}RT$$

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{p\mu}{RT}$$

$$\Delta p=-\frac{p\mu}{RT}g\Delta h$$

$$dp=-\frac{p\mu}{RT}g\,dh$$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\mu}{RT}g\,dh$$

$$\ln p=-\frac{\mu}{RT}gh+\ln c$$

$$\boxed{p=c_1e^{-\frac{\mu g}{RT}h}}$$

Пусть $p(h=0)=p_0$, тогда $\boxed{p(h)=p_0e^{-\frac{\mu g}{RT}h}}$

$$R=N_ak;\quad \mu=N_am$$

$$\boxed{p(h)=p_0e^{-\frac{mgh}{kT}}}$$

$$p=nkT$$

$$p_0=n_0kT$$

Т. о. $\boxed{n=n_0e^{-\frac{mgh}{kT}}=n_0e^{-\frac{\mu gh}{RT}}}$

Закон Дальтона.

$$p=nkT$$

$$n=n_1+n_2+n_3+\dots$$

$$p=(n_1+n_2+\dots)kT=n_1kT+n_2kT+\dots=p_1+p_2+\dots$$

где $\boxed{p_i = n_i kT}$ – парциальное давление.

Давление смеси газа является суммой парциальных давлений этих газов:

$$p_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

3.04.03г.

Семинар № 8

Распределение Максвелла-Больцмана

$$d\omega_v = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2T}\right\} dv_x\, dv_y\, dv_z$$

$$d\omega_v = d\omega_x\, d\omega_y\, d\omega_z$$

$$d\omega_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}\, e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x$$

$$d\omega_{|v|} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2\, dv$$

$$\bar{v}_x = \int_0^\infty v_x \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}\, e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \int_0^\infty e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} d(v_x^2) =$$

$$= \frac{T}{m}\sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} d\left(\frac{mv_x^2}{2T}\right)}_{=1} = \frac{T}{m}\sqrt{\frac{m}{2\pi T}} = \sqrt{\frac{T}{2\pi m}} = \bar{v}_x$$

$$\bar{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 d\frac{v^2}{2} =$$

$$= \left(\frac{8T}{\pi m}\right)^{1/2} \underbrace{\int_0^\infty x e^{-x} dx}_{=1} = \sqrt{\frac{8T}{\pi m}} = \bar{v}$$

$$\left(x = \frac{mv^2}{2T}\right)$$

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}} = \frac{1}{4}, \text{ т.о. } \bar{v}_x = \frac{1}{4}\bar{v}$$

Поток $j_x = \bar{v}_x n = \frac{1}{4} n \bar{v}$

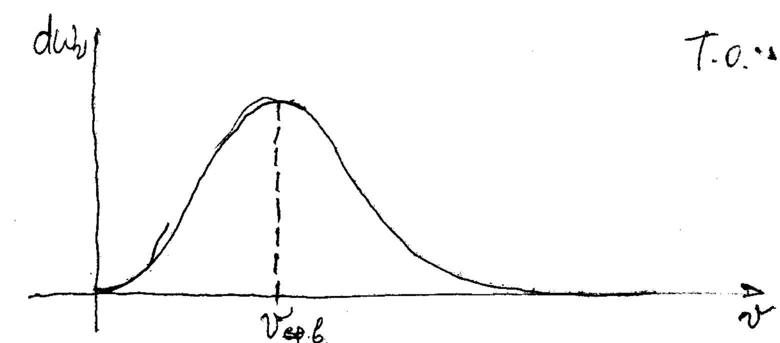
$$d\omega_v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv$$

$$\left(e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2\right)' = 2v e^{-\frac{mv^2}{2T}} - \frac{v^3 m}{T} e^{-\frac{mv^2}{2T}}$$

Т.о.: $2v - \frac{v^3 m}{T} = 0$

$$2 - \frac{v^2 m}{T} = 0;$$

$$v_в = \sqrt{\frac{2T}{m}}.$$



3.04.03г.

Лекция №9

Распределение молекул по скоростям.

1. Вероятность какого-либо события $w = \frac{N_I}{N}$ – отношение числа интересующих событий к полному числу событий.

2. $dN(x) = f(x) N dx$

любая случ. в-на

число молекул с $x \in [x; x+\Delta x]$

$f(x)$ – ф-ция распределения. (плотность вероятности).

$$w = \frac{dN(x)}{N} = f(x)dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i N_i}{N}$$ – для дискретной величины.

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\, dN(x)}{N} = \frac{N \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx}{N} = \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx$$ – среднее значение случайной величины

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) f(x) dx$$

$$N(x) = f(x) N dx$$

Средняя $\langle v \rangle$ скорость

Среднеквадратичная скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{кв.}$

Для скорости v $f(v) = A v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

$$\int_0^\infty f(v) dv = 1$$ – условие нормировки.

$$A \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 1$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-\frac{3}{2}}$$

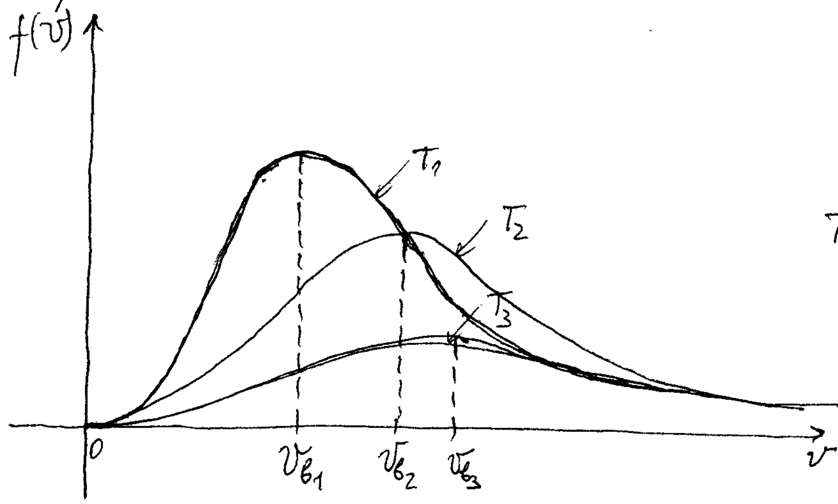
$a = +\frac{m}{2kT}$, т.о. $\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = +\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{-3/2} \cdot A = 1$, т.о.

$$A = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

$$\boxed{A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

$$f(v) = A v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$



$T_1 < T_2 < T_3$

$$v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 2v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} - \frac{mv^3}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Т.о. $\boxed{v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$

Средняя квадратичная скорость:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v)\, dv = A\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{1}{2}A\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = \frac{4\pi}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 =$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}a^{-2};\quad a = \frac{mv^2}{2kT}$$

$$= \cancel{\frac{4\pi}{2\cdot(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}} = \cancel{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{kT}}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi kT}}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\cancel{\langle v \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi kT}}}\quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2};$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m},\ \text{т.о.}\ v_{кв.} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Распределение Максвела по энергиям.

$$dN(\varepsilon) = f(\varepsilon) N d\varepsilon$$

$$\varepsilon \in [\varepsilon; \varepsilon + d\varepsilon]$$

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}.$$

$dN(\varepsilon) = dN(v)$

т.к. $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$

$f(\varepsilon)\,d\varepsilon = f(v)\,dv$

$f(\varepsilon)\,d\varepsilon = f[v(\varepsilon)]\,\frac{dv}{d\varepsilon}\,d\varepsilon$

$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$

$\frac{dv}{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$

$A v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv = f(\varepsilon)\,d\varepsilon$

$A \cdot \frac{2\varepsilon}{m} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\,d\varepsilon = f(\varepsilon)\,d\varepsilon$

$A' \cancel{f(\varepsilon)} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}$

$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon}$.

Пусть $u = \frac{v}{v_в}$ $\qquad v = u\,v_{вер.}$

$f(u)\,du = f[v(u)]\,\frac{dv}{du}\,du$

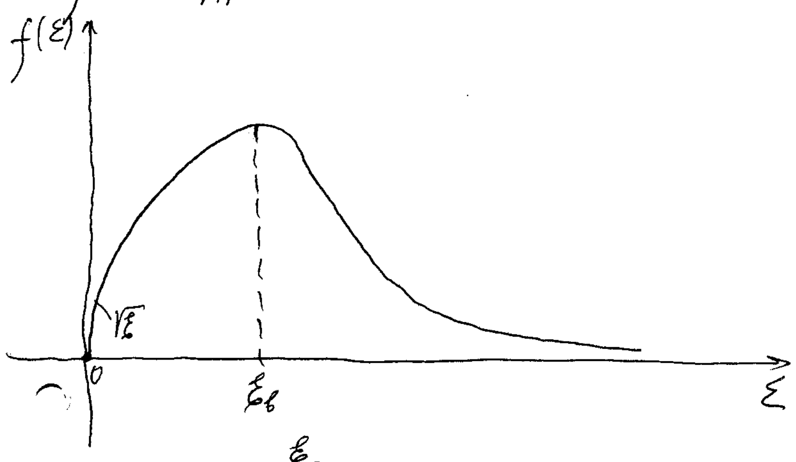
$f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \cancel{f(v)\,dv}\; f(u)\,du$

$f(u)\,du = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2\,dv = \underbrace{A e^{-\frac{m u^2 v_в^2}{2kT}} u^2 v_в^3\,du}_{f(u)}$

$f(u)\,du = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m u^2 v_в^2}{2kT} \cdot \frac{2kT}{m}} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} u^2\,du =$

$= 4\pi \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2\,du$

$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2\,du$.



$f(\varepsilon) = A' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon}$

$f'(\varepsilon_в) = 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT} = 0$$

$$kT - 2\varepsilon = 0$$

$$\varepsilon_B = \frac{kT}{2}$$

$$\boxed{\varepsilon_B = \frac{kT}{2}}$$

$$\varepsilon \in [0, 0{,}01\, kT]$$

$$w = \int_0^{0{,}01kT} f(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$f(\varepsilon) = A' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon \approx A'\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon$$

$$w \approx A'\int_0^{0{,}01kT}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon = A'\cdot\left(\frac{2}{3}(\varepsilon)^{3/2}\right)\Big|_0^{0{,}01kT} =$$

$$\cancel{\varepsilon \in [kT; kT(1}$$

$\varepsilon - kT = 0{,}01kT$ больше на 1%

$\varepsilon \in [\underset{\varepsilon_1}{kT - 0{,}01kT};\ \underset{\varepsilon_2}{kT + 0{,}01kT}]$ отличается на 1%

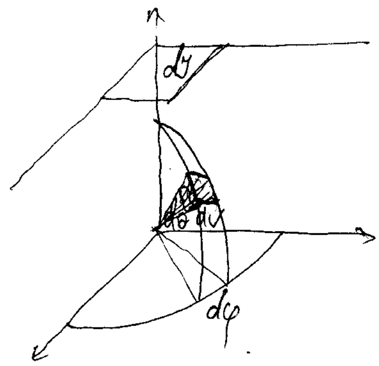
$$w = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon)\,d\varepsilon \approx S_{\text{трап.}} = f(kT)\cdot\Delta\varepsilon = f(kT)\cdot 0{,}02kT$$

Семинар №9

$$dw_{(v)} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{\frac{mv^2}{2T}} v^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dv$$ – в сферич. системе.

– Здесь T измеряется в энергетич. единицах.:

$T_{\text{в энерг.ед.}} = kT_{\text{в град.}}$



$$dy = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} v e^{-\frac{mv^2}{2T}} \int_0^{\pi/2} v^2 dv \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

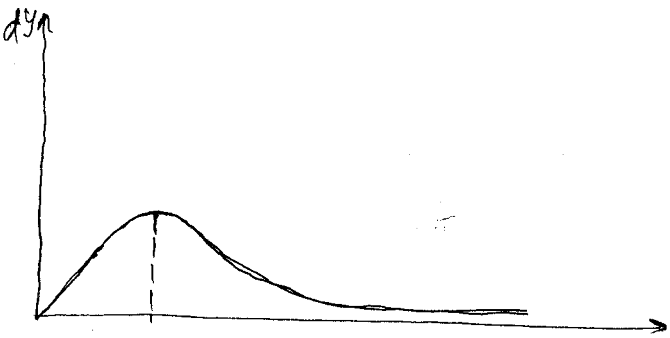
– cos возникает, чтобы указать ориентацию, направление полета частиц.

$$\boxed{dy = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \pi n v^3 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv}$$

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$$

$$dy = \frac{2\pi n}{m^2}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \frac{mv^2}{2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{dy = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}\, T^{3/2}}\, \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon}$$



Условие максимума:

$$\left(\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right)'_\varepsilon = 0$$

$$(1 - \varepsilon/T) e^{-\frac{\varepsilon}{T}} = 0$$

– Т.о. $\varepsilon_{вер} = T$ $(T = kT)$

$$\boxed{\varepsilon_{вер.} = T}$$

$z = \frac{\varepsilon}{T} \Rightarrow$

$$dJ = \frac{n\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi m}} \cdot z e^{-z} dz$$

$$\boxed{dJ = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\, z e^{-z} dz}$$

$$dJ = \frac{n}{4}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\, z e^{-z} dz$$

$\frac{n\bar{v}}{4} = J \Rightarrow$

$$\boxed{dJ = J z e^{-z} dz}$$

$$\frac{dn}{n} = dw_v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv \,\Big|\, \varepsilon = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow dv = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

$$\boxed{\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, T^{3/2}} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon} \qquad z = \frac{\varepsilon}{kT}$$

$$\boxed{\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z}\, e^{-z} dz}$$

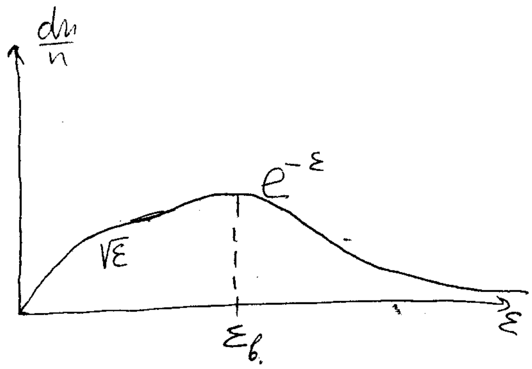
Наиб. вер эн-ия: $\left(\varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right)'_{\varepsilon} = 0$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{T}\right) e^{-\varepsilon/T} = 0$$

$$T = 2\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon}$$

$\varepsilon = \frac{T}{2}$, где $\varepsilon = \frac{kT}{2}$ (в град.)

$$\boxed{\varepsilon_{вер.} = \frac{kT}{2}}$$



№1. Найти поток через единицу пов-сти.

$$dq_{\varepsilon} = \varepsilon\, dJ$$

$$dJ = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}\, T^{3/2}} \varepsilon e^{-\varepsilon} d\varepsilon \Rightarrow$$

$$dq_{\varepsilon} = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}\, T^{3/2}} \varepsilon^2 e^{-\varepsilon} d\varepsilon \Rightarrow \Big|\, z = \frac{\varepsilon}{T}$$

$$dq = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}} T^{3/2} z^2 e^{-z} dz$$

$$q = \int_0^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi m}} T^{3/2} z^2 e^{-z} dz = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}} T^{3/2} \underbrace{\int_0^{\infty} z^2 e^{-z} dz}_{2}$$

$$q = \frac{2nm}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{3/2}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad \bar{v}_x = \frac{1}{4}\bar{v} \qquad j_x = \bar{v}_x n = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

$$dj = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \pi n v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

$$dj = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}\, T^{3/2}} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon$$

$\varepsilon_{вер.} = kT$ в потоке

$$dj = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} z e^{-z} dz \Rightarrow dj = j z e^{-z} dz$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z} e^{-z} dz$$

$\varepsilon_{вер.} = \frac{kT}{2}$ – вероятн.

Поток через 1 пов.

$$dq_\varepsilon = \varepsilon dj$$

$$dj = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}(kT)^{3/2}} \varepsilon e^{-\varepsilon} d\varepsilon \qquad dq_\varepsilon = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}(kT)^{3/2}} \varepsilon^2 e^{-\varepsilon} d\varepsilon$$

$$dq_\varepsilon = \frac{n}{\sqrt{2\pi m}} (kT)^{3/2} z^2 e^{-z} dz$$

$$q = \int_0^\infty \frac{n}{\sqrt{2\pi m}} (kT)^{3/2} \underbrace{z^2 e^{-z} dz}_{=2} = \frac{2nm}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{3/2}$$

$\bar{\varepsilon} = \frac{q}{j} = 2kT$ – среднее в потоке

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, T^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon = \frac{\varepsilon T^{5/2}}{\sqrt{\pi}\, T^{3/2}} \int_0^\infty z^{5/2} e^{-z} dz = \frac{3}{2} kT$$ – среднее

$\cancel{\Delta N}$ $\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}_{0,01kT}} \sqrt{z} e^{-z} dz$

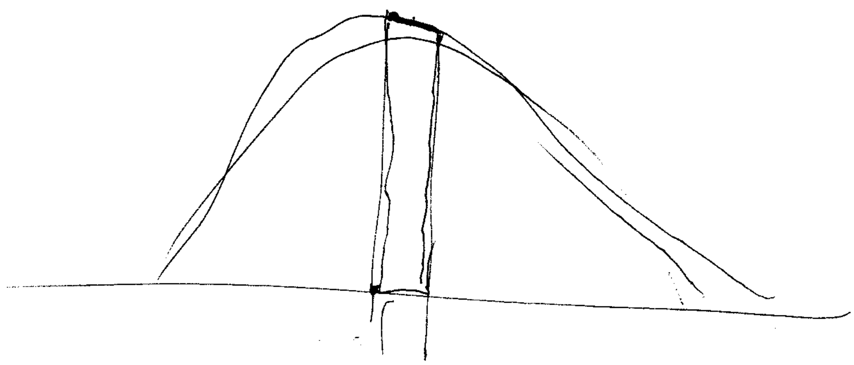
$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0 \sqrt{z}\, dz$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{3} z\sqrt{z} \Big|_0^{0,01kT} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (0,01kT)^{3/2}$$

$$\Delta N_{общ.} = n_1 V$$

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} n_1 V (0,01kT)^{3/2}$$

$\Delta \Lambda =$



$$\bar{\varepsilon} = \frac{q}{j} = \frac{2\pi m}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{kT}{m}\right)^{3/2}\cdot\frac{4}{n}\cdot\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = 2kT$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,T^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}e^{-\varepsilon/T}\,d\varepsilon = \frac{\varepsilon T^{3/2}}{\sqrt{\pi}\,T^{3/2}}\int_0^\infty z^{3/2}e^{-z}\,dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}T}$$

$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}T \text{ или } \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT}$ — средняя ~~скорос~~ энергия молекул

$\boxed{\bar{\varepsilon} = 2kT}$ — средняя энергия молекул в потоке.

$\boxed{\varepsilon_{вер} = kT}$ — наиболее вероятная энергия в потоке.

$\boxed{\varepsilon_{вер} = \frac{kT}{2}}$ — наиболее вероятная энергия

№2. Определить долю молекул $\frac{dn}{n}$ газа, $\varepsilon \in [0; 0{,}03kT]$

Решение:

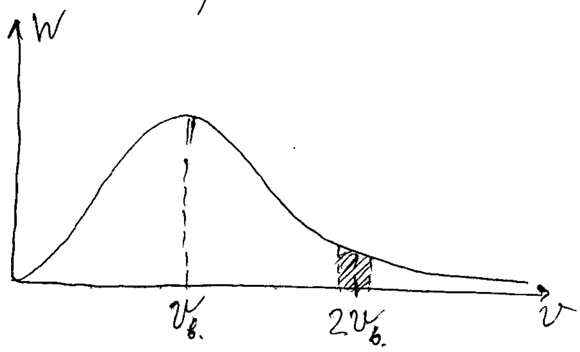
$z \in [0; 0{,}03]$

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{z}\,e^{-z}\,dz$$

Т.к. $e^{-z} \approx 1 \ \forall z \in [0; 0{,}03]$, то

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0{,}03}\sqrt{z}\,dz = \cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\right)\Big|_0^{0{,}03} = \frac{1}{\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{\pi}}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{z^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\Big|_0^{0{,}03} = \ldots$$

№3. Определить вер. того, что скорость отлич. от $2v_{вер.}$ не более чем на 3%



$$w = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\underbrace{v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}}}_{\text{в малом интерв. — const.}}dv$$

$$W = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\left(\frac{8T}{m}e^{-4}\right)\left(0{,}02\sqrt{\frac{2T}{m}}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot 4\cdot 0{,}12\cdot e^{-4} = \frac{1{,}92e^{-4}}{\sqrt{\pi}}$$

№3. Найти число колебаний N, кот. усп. сов. молек. за время своего свободного пробега.

$$N = \frac{\tau_{св.пр.}}{T_{кол.}}$$

(период) – известен ($T = \frac{1}{\nu}$, ν дано)

d – ~~длина сво~~ эф. диаметр молекулы.

T – темп.; m – масса мол.; ρ – плотн. газа.
(n_0 – число част. в 1 объеме)

$$\tau_{с.п.} = \frac{l}{v}$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kT}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{kTN_A}{mN_A}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

$$\boxed{\sigma = \pi d^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{N = \frac{\nu}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot \sqrt{\frac{M}{RT}}}$$

10.04.03г.

Лекция №10
Флуктуации.

Флуктуация – отклонение величины от среднего значен.

$$\Delta V \qquad \langle v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V'(t_i)}{n}$$

$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$

Для больших систем в классической термодинамике флуктуации очень малы и не учитываются.

Термодинамика.

V, p, T – параметры системы.

Внутренняя энергия какого-либо тела (ж., т., г.) называется энергия за вычетом $E_{кин.}$ тела как целого и $E_{пот.}$ тела во внешнем поле сил.

Нулевое (общее) начало термодинамики.

Каково бы не было начальное состояние тел изолированной системы в ней в конце-концов установится термодинамическое равновесие, в котором прекратятся все макроскопические процессы.

Внутренняя энергия газа (U).

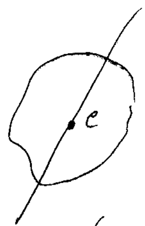
$\boxed{\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT}$, где i - число степеней свободы.

постулат Больцмана.

i = числу независимых координат, необходимых для того, чтобы задать положение системы в пространстве.

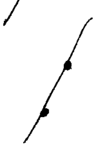
Для одноат. мол. (поступ. движение) $i = 3$.

Трехат.



$i = 3+2+1 = 6$

Двухат.:



$i = 3+2 = 5$.

Для N-ат. $i = 3N - \underbrace{6}_{\text{движ. тела как целого.}}$

$U_{моля} = N_A \cdot \frac{i}{2}kT$

$$\boxed{U_{моля} = \frac{i}{2}RT}$$

$$\boxed{U_{произв.} = \nu\frac{i}{2}RT}$$

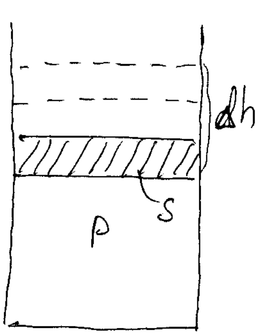
$$\boxed{U_{смеси} = \sum_{i=1}^{n}\nu_i\frac{i_i}{2}RT}$$

Первое начало термодинамики:

$\Delta U = A' + \Delta Q$

A' - работа внешних сил.

$A = -A' \Rightarrow \boxed{\Delta Q = \Delta U + \delta A}$



Квазистатический процесс - это процесс при котором тело переходит из одного состояния термодинамического равновесия в другое состояние термодинамического равновесия.

В термодинамике рассматриваются только квазистатические процессы.

$p = \frac{F}{S}$ $F = pS$

$\delta A = F\,dh = pS\,dh$ $\boxed{\delta A = p\,dV}$

1) Пусть процесс изобарический:

от V_1 до V_2 при $p = const$

$dA = p\,dV$

$A = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$

2) Пусть процесс изотермический:

от V_1 до V_2, $T = const$

$pV = RT$

$p = \frac{RT}{V}$

$dA = p\,dV = RT\frac{dV}{V} = RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = RT\ln\frac{V_2}{V_1}$

Теплоемкость.

$\boxed{dQ = dU + p\,dV}$ - I закон.

Теплоемкость тела численно равна кол-ву тепла, необходимому для того, чтобы температура тела повысилась на один градус.

$\boxed{C_{тела} = \frac{dQ}{dT}}$

$C_{моля} = \frac{dQ}{dT}\Big|_{1\,моль}$ и $C_{удельн.} = \frac{dQ}{dT}\Big|_{ед.\,массы}$

$C_{моля} = \mu \cdot C_{ед.\,массы}$

Вычисление молярных теплоемкостей.

1) Изобарический процесс:

$p = const$, $C = C_p$

$C_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + p\frac{dV}{dT} = C_V\frac{dT}{dT} + R\frac{dT}{dT} = C_V + R$

$pV = RT$

$\cancel{V = \frac{RT}{p}}$

$p\,dV = R\,dT$

Т.о. имеем <u>формулу Майера:</u>

$\boxed{C_p = C_V + R}$

2) Изохорный процесс: $V = const$, $c = C_V$

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{V=const} = \frac{dU}{dT} + p\underbrace{\frac{dV}{dT}}_{0} = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2}R$$

$$\Downarrow$$

$$dU = C_V\, dT$$

Вычисление теплоемкости смеси.

ν_1 и ν_2 H_2 и He

$$C_{V_{уд.}} = \frac{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}}{m_1 + m_2} = \frac{\nu_1 \cdot \frac{5}{2}R + \nu_2 \cdot \frac{3}{2}R}{\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2} \neq$$

$$C_{V_{мол.}} = \frac{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\nu_1 \cdot \frac{5}{2}R + \nu_2 \cdot \frac{3}{2}R}{\nu_1 + \nu_2}$$

Адиабатический процесс.

– процесс, идущий без подвода тепла, без теплообмена.
К адиабатическому близок быстрый процесс.

$$0 = dU + pdV = C_V\, dT + pdV = 0$$

$$pV = RT$$

$$T = \frac{pV}{R} \Rightarrow \cancel{C_V} \cdot d(pV) = R\, dT;$$

$$pdV + Vdp = R\, dT \Rightarrow$$

$$\frac{C_V}{R}(pdV + Vdp) = -pdV$$

$$\left(\frac{C_V}{R} + 1\right)pdV = -Vdp \cdot \frac{C_V}{R}$$

$$\cancel{\frac{C_V}{R}} + \frac{C_V + R}{C_V}\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

$\boxed{\frac{C_V + R}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} = \gamma}$ – показатель адиабаты.

$$-\ln p = \gamma \ln V + c;$$

$$\ln V^{\gamma} \cdot p = const.$$

Т.о. уравнение адиабаты $\boxed{V^{\gamma} \cdot p = const}$ вывести для (VT) и (pT)

Политропический процесс. Политропа.

Политропич. процесс – процесс, идущий при постоянной теплоемкости.

$$\frac{dQ}{dT} = c \qquad c\,dT = C_v dT + p\,dV$$

$$dQ = C\,dT \qquad (c - C_v)\,dT = p\,dV$$

$$pV = RT \Rightarrow T = \frac{pV}{R} \Rightarrow dT = \frac{p\,dV + V\,dp}{R}$$

$$(c - C_v)\frac{p\,dV + V\,dp}{R} = p\,dV$$

$$p\,dV\left(\frac{c - C_v}{R} - 1\right) = -\frac{(c - C_v)}{R}V\,dp$$

$$\left(\frac{c - C_v}{R} - 1\right)\frac{dV}{V} = -\frac{(c - C_v)}{R}\frac{dp}{p}$$

$$\frac{c - C_v - R}{c - C_v}\,p\,dV = -V\,dp;$$

$$\frac{c - C_p}{c - C_v}\cdot\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p};$$

$$-\ln p + C = \ln V^{\frac{c - C_p}{c - C_v}};$$

$$\ln V^{\frac{c - C_p}{c - C_v}}\cdot p = \mathrm{const} \Rightarrow$$

$$\boxed{V^{\frac{c - C_p}{c - C_v}}\cdot p = \mathrm{const}}$$

Т.о. адиабатический процесс есть частный случай политропического процесса.

Энтальпия

– это ф-ция состояния, приращение которой при изобарическом процессе дает количество теплоты, полученной системой.

$$I = U + pV$$

$$dI = dU + p\,dV$$

$$dQ = dU + p\,dV$$

17.04.03г. Семинар № 10.

№1. $|\vec{p}|$

$$dJ = \pi n \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2}} dv$$

$$dJ = \pi n \cdot \frac{1}{(2\pi T m)^{3/2} m} (mv)^3 e^{-\frac{(mv)^2}{2mT}} d(mv)$$

$$dJ = \pi n \frac{\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}}{m^4} p^3 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp$$

$p_{вер}$ из усл: $(\,)' = 0$

$$\left(p^3 \cdot e^{-\frac{p^2}{2mT}}\right)' = 0$$

$$3p^2 e^{-\frac{mp^2}{2mT}} - \frac{p^4}{mT} e^{-\frac{mp^2}{2mT}} = 0$$

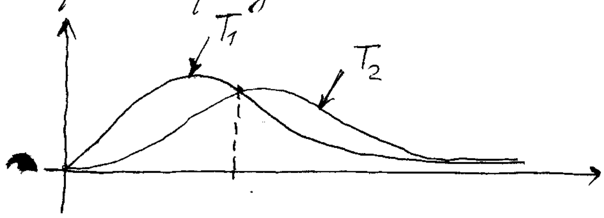
$$3p^2 - \frac{p^4}{mT} = 0 \quad p \neq 0$$

$$3 - \frac{p^2}{mT} = 0$$

$$p_в = \sqrt{3mT}$$

$\boxed{p_в = \sqrt{3mT}}$ наиболее вер. импульс в потоке.

№2. Молекула O_2. Газ нагрет до T_1. Затем до температуры T_2. Найти точку пересечения ф-ций распределения.



$$dw_v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv$$

$$\frac{1}{T_1^{3/2}} e^{-\frac{mv_*^2}{2T_1}} = \frac{1}{T_2^{3/2}} e^{-\frac{mv_*^2}{2T_2}}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} = e^{\frac{mv_*^2}{2T_1} - \frac{mv_*^2}{2T_2}}$$

$$v_* = \sqrt{\frac{3 T_1 T_2 \ln T_2/T_1}{(T_2 - T_1) m}} \quad \text{или}$$

$$v_* = \left[\frac{3R}{M} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \cdot \frac{T_2 T_1}{T_2 - T_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

№3. Есть смесь газов N_2 и J_2. Отнош. конц. $\frac{n_1}{n_2}$ дана. Найти $\frac{J_1}{J_2}$ на стенку сосуда. Потоки, энергии которых лежат между $\varepsilon_{вер}$ и ∞, т.е. $\varepsilon_{вер} \leq \varepsilon \leq \infty$.

$$d\nu = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\, z e^{-z} dz$$

$$z_{\text{в}} = \frac{\varepsilon_{\text{в}}}{kT}$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n_1}{n_2}\cdot\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\,\frac{\int_{1}^{\infty} z e^{-z} dz}{\int_{1}^{\infty} z e^{-z} dz} = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$\boxed{\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}$$

№4 В сосуде куб. ф-мы V, газ н.у. При соударении со ст. мол-ла прилипают с вероятн. ~~1/2~~ β в том случае если их $\varepsilon \in [0; \varepsilon_{\text{вер.}}]$. Найти число частиц N которые прилипнут на внутр. стенках за время τ.

$$d\nu = n_1\sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \int_0^{z_{\text{в}}} z e^{-z} dz \cdot \tau \cdot \underset{6V^{2/3}}{S} \cdot$$

$S = \sqrt[3]{V^2} = V^{2/3}$ одной грани.

$$n_1 = \frac{N_A}{V_m} = 2{,}67 \cdot 10^{19}\,\frac{1}{\text{см}^3}$$

Тогда $\Delta N = 6\beta n\sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \int_0^{z_{\text{в}}} z e^{-z} dz \cdot \tau \cdot V^{2/3} =$

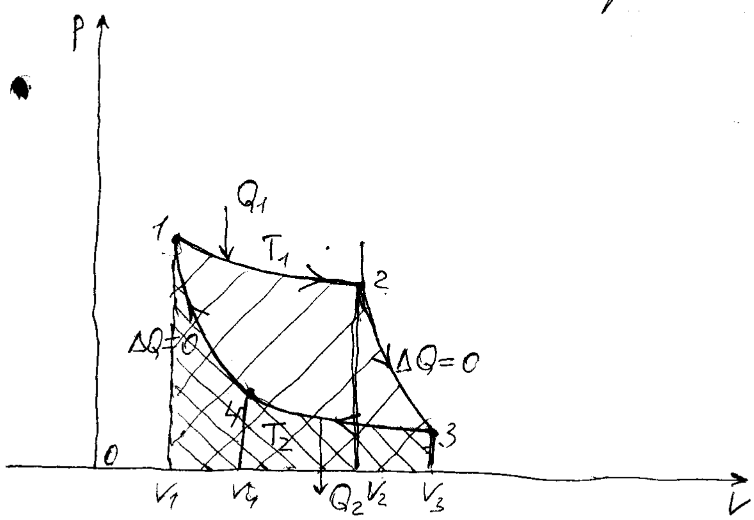
$$= 6\beta V^{2/3} \tau n_1 \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon_{\text{в}}}{kT} + 1\right) e^{-\frac{\varepsilon_{\text{в}}}{kT}}\right].$$

№5. ~~Дано~~ межъяд. расст. d, n. Найти число оборотов за ~~t своб. пр.~~ t пролета среднего расст. между част.

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

11.04.03г.

Лекция № 11.
Цикл Карно.



$$A = A_{123} + A_{341} = A_1 - |A_2|$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1}$$

$Q_2 = -Q_2'$ (где Q_2' - кол-во тепла, отданного холодильнику).

Процесс 1-2: $\delta Q = \underset{0 \text{ т.к. } T = const}{dU} + p\,dV$

$$\delta Q = p\,dV \Rightarrow Q_1 = \int_1^2 p\,dV$$

для 1 м: $pV = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V}$, т.о. $Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V}\,dV = RT_1 \ln V_2/V_1$

Процесс 2-3: $\delta Q = 0$ (адиабата).

Процесс 3-4: $T = const$, т.о.

$$Q_{34} = RT_2 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln V_4/V_3 = Q_2, \text{ т.о.}$$

$$Q_2' = RT_2 \ln V_3/V_4$$

Следовательно: $\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \frac{\ln V_3/V_4}{\ln V_2/V_1}$

Для адиабаты $pV^\gamma = const$

$pV = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V}$, т.о. $RTV^{\gamma-1} = const \Rightarrow$

$TV^{\gamma-1} = const$ (т.к. R тоже const).

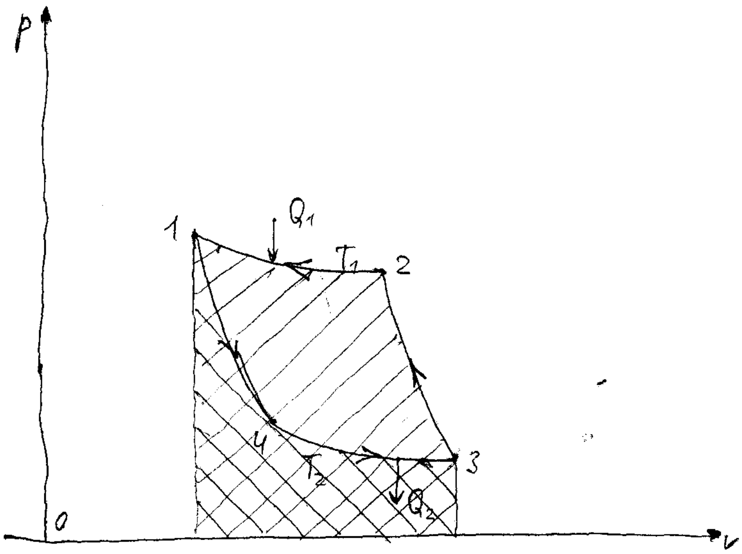
Процесс 2-3: $T = T_1;\ V = V_2 \Rightarrow T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ (1)

Процесс 4-1: $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ (2)

Делим (1) на (2): $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \frac{\ln V_3/V_4}{\ln V_2/V_1} = 1$, т.о.

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Обратимый процесс – ~~если в исходное~~ это процесс, который может быть проведен в обратном направлении через те же состояния, что и в прямом.



$Q_1 < 0$

$Q_2 > 0$

$\boxed{A < 0}$

Это т.н. "холодильная машина."

$\eta = \frac{|Q_2|}{A}$

Все характеристики аналогичны тепловой.

<u>Заключение:</u> самопроизвольный переход тепла от холодного тела к горячему невозможен. Для того, чтобы совершить такой переход, необходимо за счет внешних сил совершить работу.

Второе начало термодинамики.

Невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых ~~явилось~~ был бы переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому.

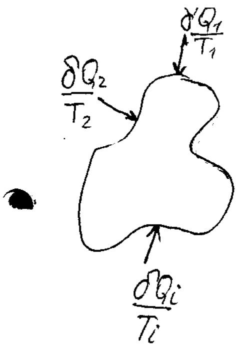
Невозможны такие периодические процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела определенного количества тепла и превращение этого тепла полностью в работу.

В общем случае: $\boxed{1 - \frac{Q_2'}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}}$ ("=" для квазистатического процесса).

$$\frac{T_2}{T_1} - \frac{Q_2'}{Q_1} \leq 0 \;\Big|\cdot \frac{Q_1}{T_2}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2'}{T_2} \leq 0$$

$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0}$ – неравенство Клаузиуса.



$\frac{\delta Q_i}{T_i}$ – приведенное количество тепла.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0$$

Для обратимого процесса:

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = S_2 - S_1 = \Delta S}$$

, где S – энтропия.

Физический смысл имеет изменение энтропии – его можно измерить. S – ф-ция состояния.

$T = const$

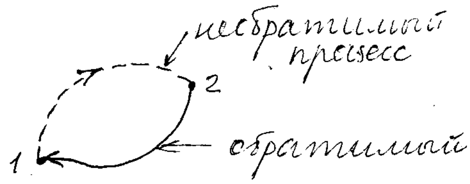
$V_1 - V_2$

$$\delta Q = \underset{0}{dU} + p\,dV$$

$$\delta Q = p\,dV$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p\,dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{R\,dV}{V} = R \ln V_2/V_1 \text{ (на моль)}$$

$$\Delta S = k \ln V_2/V_1 \text{ (на молекулу)}$$



$$\int_1^2 \frac{\delta Q_1}{T_1} + \int_2^1 \frac{\delta Q_2}{T_2} \le 0$$

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_1}{T_1} + S_2 - S_1 < 0 \Rightarrow S_2 - S_1 < \int_1^2 \frac{\delta Q_1}{T_1} \Rightarrow \boxed{S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{\delta Q_1}{T_1}}$$

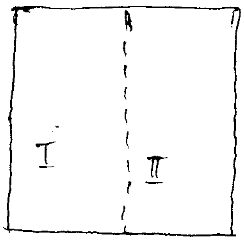
Адиабатический процесс:

$$S_2 - S_1 \geq 0$$

Если система адиабатически изолирована, то ее энтропия в некотором равновесном состоянии максимальна и это состояние является термодинамически устойчивым.

Энтропия и вероятность.

W – термодинамическая вероятность.



~~Число молекул в i-ой половинке~~

I	II	
0	4	1234
1	3	123 124 234 134
2	2	

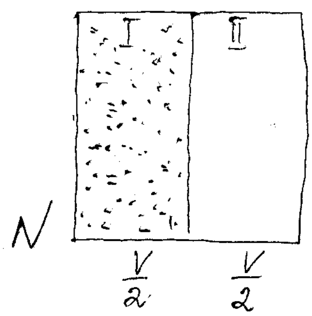
Число молекул:

I	II	
0	1,2,3,4	C_4^0
1	2,3,4	C_4^1
2	1,3,4	
3	1,2,4	
4	1,2,3	
12 21	34 43	C_4^2
13 31	24 42	
14 41	23 32	C_4^3
1,2,3,4	0	C_4^0 C_4

24.04.03г.

Лекция №12.

$\boxed{S_2 - S_1 \geq 0}$



$\langle N_2 \rangle = \langle N_1 \rangle$

При этом в каждый мом. врем. есть флуктуации N_1 и N_2

Самопроизв. отклонения N_1, N_2, а также любых физ. величин от их средних значений, обусловленные тепловым движением, называются флуктуациями

$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^N$

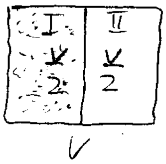
A – все молекулы с одной стороны.

W – термодинам. вер-сть – это число микросостояний системы (конкретных распределений молекул по пр-ву), которым может быть реализовано данное макросостояние.

$\boxed{S = k\ln W}$ – энтропия 1 моля.

Соотв., на 1 молекулу $s = k\ln W$.

Измерить можно только изменение энтропии.



Убирая перегородку получим $\Delta S = R\ln 2$.

① В начале все молекулы слева, $\frac{V}{2}$.

Разобьем на ΔV (очень малые элем. объема, но с больш. числом молекул).

$$W_1 = \left(\frac{V}{2\Delta V}\right)^N \qquad S_1 = kN\ln\frac{V}{2\Delta V}$$

② Молекулы занимают весь объем.

$$W_2 = \left(\frac{V}{\Delta V}\right)^N \qquad S_2 = kN\ln\frac{V}{\Delta V}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = kN\left(\ln\frac{V}{\Delta V} - \ln\frac{V}{2\Delta V}\right) = kN\ln\frac{V}{\Delta V}\cdot\frac{2\Delta V}{V} = kN\ln 2.$$

$\Delta S = kN\ln 2$, если $N = N_A$, то

$\Delta S = R\ln 2$.

<u>Гипотеза Больцмана:</u> Вселенная находится в состоянии гигантской флуктуации, т.е. она "живет-умирает" и т.д., причем время ф-ции много больше времени равновесия.

<u>Элементы физической кинетики</u>

Пусть $\xi(t)$ – велич. отклонения от средн. величины.

$$d\xi(t) = -k\xi(t)dt$$

$$\frac{d\xi(t)}{\xi(t)} = -kdt;$$

$$\ln\xi(t) = -kt + \ln C;$$

$$\xi(t) = Ce^{-kt}$$

$t=0$, $\xi(0)=\xi_0$; $\xi_0 = C$, т.о.

$$\xi(t) = \xi_0 e^{-kt}$$

Время релаксации τ – это время, за которое отклонение уменьшится в e раз:

$$\tau: \ \frac{\xi(\tau)}{\xi_0} = \frac{1}{e}$$

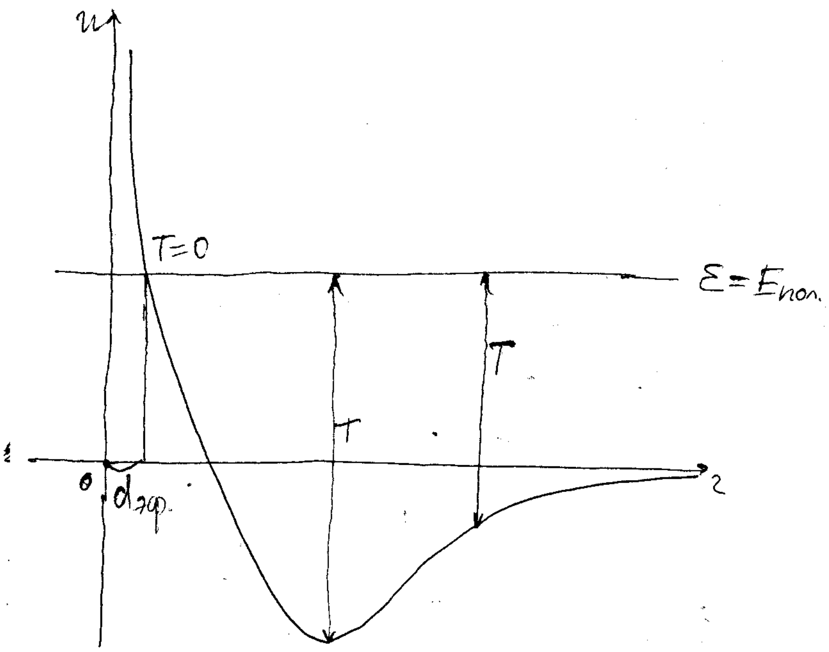
$$\xi(\tau) = \xi_0 e^{-k\tau}$$

$$\frac{\xi_0 e^{-k\tau}}{\xi_0} = e^{-1};$$

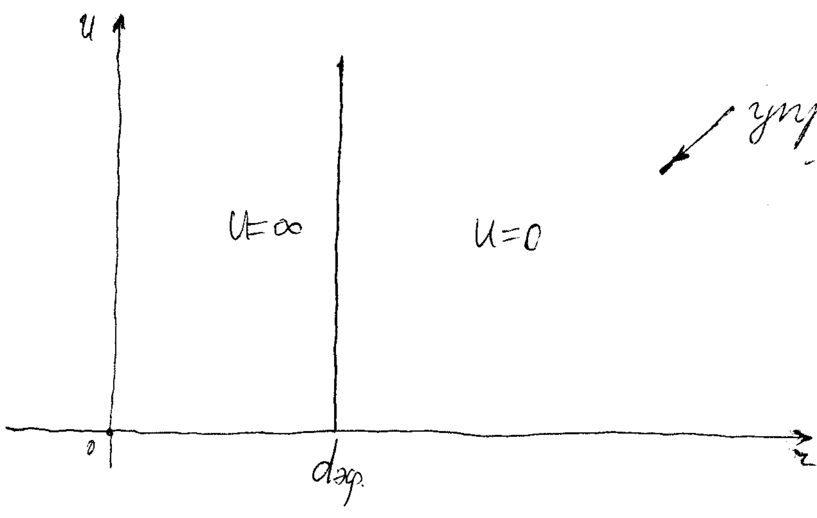
$$k\tau = 1$$

$$k = \frac{1}{\tau}$$

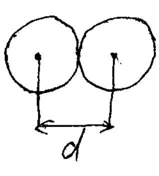
$$\boxed{\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

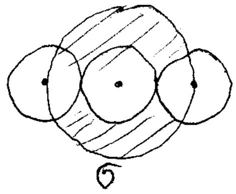


$$E_к = E_п - U$$



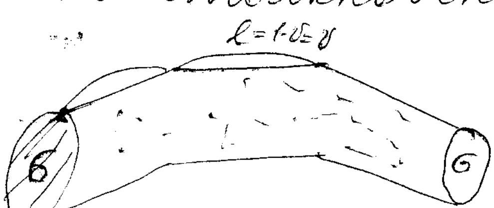
упрощенная модель.





$\sigma = \pi d^2$
сечение столкновений.

Число столкновений в ед. времени (z).



$z = \sigma \langle v \rangle n = \pi d^2 \langle v \rangle n \, (\cdot \sqrt{2})$

с учетом движ. всех.

$z = \sqrt{2}\, \pi d^2 \langle v \rangle n$

Длина свободного пробега – среднее расстояние, которое пробегает молекула между двумя последовательными столкновениями.

$z = \sqrt{2}\, \pi d^2 \langle v \rangle n$

$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{z} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$

$d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м

ℓ при н.у. $\sim 10^{-7}$ м

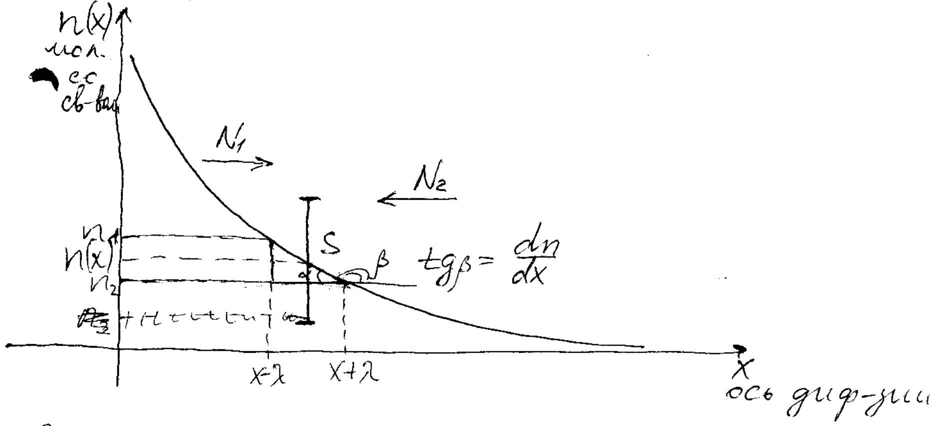
В глуб. вакууме 10^{-9} Па – $\sim 10^{7}$ м.

Явления переноса.
Диффузия.

– это процесс выравнивания конц-ций в системе, обусловленный хаотическим движением элементов системы.

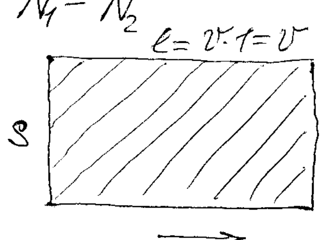
Самодиффузия – диффузия молекул, отличающихся каким-либо св-вом (например, радиоактивностью) в среде таких же молекул, не обладающих этим свойством.

Пример – CO в N_2: очень близки m и $d_{эф}$.



Закон Фика: $N = -D \frac{dn}{dx} S$

$N = N_1 - N_2$



$n' = \frac{1}{6} n$ – число „интерес." молекул в этом объеме.

$N_1 = \frac{1}{6} n_1 S \langle v \rangle$

$N_2 = \frac{1}{6} n_2 S \langle v \rangle$

Чтобы молекула „распространилась", она должн
оттолкнуться.

$$dn = \frac{dn}{dx}\cdot dx$$

$$\Delta n = \frac{dn}{dx}\cdot \Delta x \text{ (для малых отклонений)}$$

$$N = N_1 - N_2 = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\langle v\rangle S \ominus$$

$$n_1 - n_2 = 2\lambda\, tg\alpha = -2\lambda\, tg\beta = -2\lambda\frac{dn}{dx}$$

$$\ominus -\underbrace{\frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle}_{D}\frac{dn}{dx}S$$

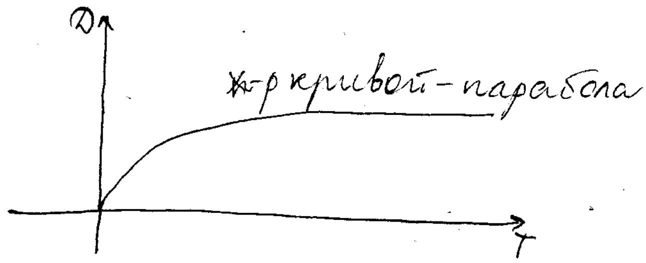
Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle$

Найдем $D(T)$:

$D(T)$, $n = const$.

$D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle$; $\lambda \sim \frac{1}{n} = const$

$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \Rightarrow \langle v\rangle \sim \sqrt{T}$, т.о.

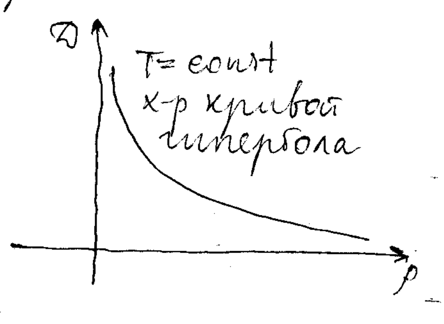


Найдем $D(p)$:

$D(p)$, $n = const$

$p = nkT$, $\lambda \sim \frac{1}{n} \sim \frac{1}{p}$, т.к. $n \sim p$

$\langle v\rangle = const$, т.о. $D(p) \sim \frac{1}{p}$



Теплопроводность.

– это процесс переноса тепла, обусловленный хаотическим (тепловым) движением микрочастиц.