$$p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$$

Рассмотрим случай:

$|A\rangle : \langle A|A\rangle = 1 \qquad \bar{p} = \langle A|p|A\rangle = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \bar{q} = \langle A|q|A\rangle = 0$

$$\overline{(\Delta p)^2} = \overline{(p-\bar{p})^2} = \overline{p^2} - 2\overline{p\bar{p}} + \overline{\bar{p}^2} = \overline{p^2}$$

$|B\rangle = a^-|A\rangle$ сост. $|B\rangle$ имеет неотриц. норму.

$$0 \le \langle B|B\rangle = \frac{1}{2\omega\hbar}\left(\langle A|p^2|A\rangle - i\omega\langle A|[p,q]|A\rangle + \omega^2\langle A|q^2|A\rangle\right)$$

$$0 \le \omega^2\overline{(\Delta q)^2} - \hbar\omega + \overline{(\Delta p)^2} \Rightarrow$$

$$D = \hbar^2 - 4\overline{(\Delta p)^2}\cdot\overline{(\Delta q)^2} \le 0$$

$$\Delta p\,\Delta q \ge \frac{\hbar}{2}$$

Равенство достигается только в вакуум-состоянии.

Это численная интерпретация принципа неопределенностей.

$\Delta p \cdot \Delta q \ge \frac{\hbar}{2}$ — соотношение неопределенностей.

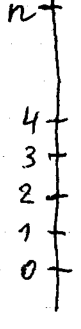
Осциллятор.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \to H = \frac{1}{2m}(p^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2}\omega\hbar(a^+a^- + a^-a^+) =$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$H = \omega\hbar(n + \frac{1}{2})$ — ф-ция Гамильтона в представлении Фока.

Спектр энергии осциллятора:



Это т.н. квазичастицы — система, описываемая коллективными координатами.

Квантовый динамический принцип.

Гамильт. мех: $\dot{\alpha} = \{H, \alpha\}$

$\Downarrow$ переход к КМ

$\dot{\alpha} = \frac{1}{\hbar}[H, \alpha]$ - уравнение Гейзенберга (это постулат)

Это уравнение имеет тривиальное решение:

$\alpha(t) = U(t,t_0)\,\alpha(t_0)\,U^{-1}(t,t_0)$

$U(t,t_0) = e^{\frac{1}{\hbar}(t-t_0)}$

При этом неявно предполагается, что состояние не меняется.

$$\langle A|\alpha|A\rangle = \underbrace{\langle A|U(t,t_0)}_{\langle A(t)|}\,\alpha(t_0)\,\underbrace{U^{-1}(t,t_0)|A\rangle}_{|A(t)\rangle}$$

перенос зависим. от врем. с оп-ра на сос-ние.

$\frac{d}{dt}|A(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}H|A(t)\rangle$ - уравнение Шредингера

ур-ние, описыв. эволюцию вектора состояние

$\dot{\alpha} = \frac{1}{\hbar}[H,\alpha]$ - картина Гейзенберга

$\frac{d}{dt}|A(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}H|A(t)\rangle$ - картина Шредингера

Они эквивалентны.

Представление разбиения - смешанная картина.

Лекция № 21. 26.03.2004г

Момент в квантовой механике.

$M_i = \varepsilon_{ijk}\, r_j\, p_k$

Принцип квантования: $[p_k; r_j] = \delta_{kj}\frac{\hbar}{i}$

Вычислим коммутатор:

$[M_i; M_l] = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,[r_j p_k; r_m p_n] =$

$= \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\big([r_j p_k; r_m]p_n + r_m[r_j p_k; p_n]\big) \ominus$

/* $[a;bc] = abc - bca = abc - bac + bac - bca =$

$= (ab - ba)c + b(ac - ca) = [a;b]c + b[a;c]$

Правило Лейбница (следует из определения) */

$\ominus\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\big(r_j \underbrace{[p_k; r_m]}_{\delta_{km}\frac{\hbar}{i}} p_n + r_m \underbrace{[r_j, p_n]}_{-\delta_{jn}\frac{\hbar}{i}} p_k\big) =$

$= \frac{\hbar}{i}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(\delta_{km} r_j p_n - \delta_{jn} r_m p_k) \ominus$

$-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lnk} = -\delta_{il}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jl}$

(δ_{km} превращ. m в k)

$\ominus\ \frac{\hbar}{i}\big((-\delta_{il}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jl}) r_j p_n - (-\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) r_m p_k\big) =$

$= \frac{\hbar}{i}(-\delta_{il}\cancel{r_j} p_j + r_l p_i + \delta_{il} \cancel{r_m} p_m - r_i p_l) =$

$= \frac{\hbar}{i}(r_l p_i - r_i p_l) = -\frac{\hbar}{2}\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{mnk}\{r_m p_n = i\hbar\varepsilon_{ilk} M_k$

$-\frac{\hbar}{i}\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{mnk} r_m p_n = -\frac{\hbar}{2}(\delta_{im}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{lm}) r_m p_n = -\frac{\hbar}{2}(r_i p_l - r_l p_i)$

$[M_i, M_l] = i\hbar\varepsilon_{ilk} M_k$

Так коммутируют компоненты момента.

Вычислим коммутатор:

$[M_i, M_j M_j] = i\hbar(\varepsilon_{ijk} M_k M_j + \varepsilon_{ijk} M_j M_k) =$

$= i\hbar\varepsilon_{ijk}(M_k M_j + M_j M_k) = 0$

Т.о. $[M_i, \underline{M}^2] = 0$.

Полный набор коммутирующих операторов - два оператора M_i и $\underline{M}^2$.

Т.о. в данном случае для строительства фоковского пространства надо ввести две пары операторов: $\alpha^\pm$ и $\beta^\pm$: все α ком. со всеми β и $[\alpha^-, \alpha^+] = [\beta^-, \beta^+] = 1$.

Базис состоит из общих собственных векторов $\alpha^\pm$ и $\beta^\pm$:

$\alpha^+\alpha^+|a, b\rangle = a|a, b\rangle$

$\beta^+\beta^+|ab\rangle = b|ab\rangle$

$\alpha^+|a, b\rangle = \sqrt{a+1}|a+1, b\rangle$ для $\beta^\pm$ аналогично.

$\alpha^-|a, b\rangle = \sqrt{a}|a-1, b\rangle$

$$M_1 = \frac{\hbar}{2}(\alpha^+\beta^- + \beta^+\alpha^-)$$
$$M_2 = \frac{\hbar}{2i}(\alpha^+\beta^- - \beta^+\alpha^-)$$
$$M_3 = \frac{\hbar}{2}(\alpha^+\alpha^- - \beta^+\beta^-)$$

Независимая комбинация:
$$\lambda = \frac{\hbar}{2}(\alpha^+\alpha^- + \beta^+\beta^-)$$
$$\underline{M}^2 = \lambda^2 + \hbar\lambda$$

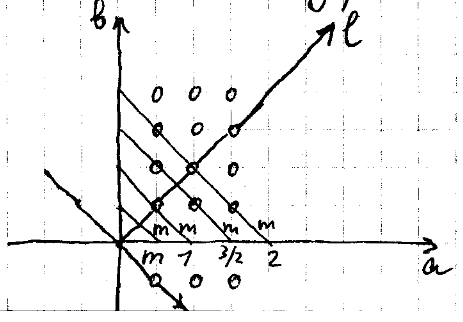
Вычислим коммутатор:
$$[M_1, M_2] = \frac{\hbar^2}{4i}\left[(\alpha^+\beta^- + \beta^+\alpha^-), (\alpha^+\beta^- - \beta^+\alpha^-)\right] =$$
$$= \frac{\hbar^2}{4i}\left(-[\alpha^+\beta^-, \beta^+\alpha^-] + [\beta^+\alpha^-, \alpha^+\beta^-]\right) =$$
$$= \frac{\hbar^2}{4i}\Big\{-\big(\underbrace{[\alpha^+\beta^-, \beta^+]}_{\alpha^+}\alpha^- + \beta^+\underbrace{[\alpha^+\beta^-, \alpha^-]}_{-\beta^-}\big) + \underbrace{[\beta^+\alpha^-, \alpha^+]}_{\beta^+}\beta^- + \alpha^+\underbrace{[\beta^+\alpha^-, \beta^-]}_{-\alpha^-}\Big\} =$$
$$= \frac{\hbar^2}{4i}\left\{-\alpha^+\alpha^- + \beta^+\beta^- + \beta^+\beta^- - \alpha^+\alpha^-\right\} = \frac{i\hbar^2}{2}(\alpha^+\alpha^- - \beta^+\beta^-) =$$
$$= i\hbar M_3 \quad // \ [M_1, M_2] = i\hbar\varepsilon_{123}M_3 = i\hbar M_3)$$

Убедились в верности такой комбинации.

! Провести выкладку, убедиться, что $\underline{M}^2 = \lambda^2 + \hbar\lambda$

Действие операторов на вектора базиса (обозначены ab):
$$M_3|ab\rangle = \underbrace{\frac{\hbar}{2}(a-b)}_{M_3'}|ab\rangle = \hbar m|ab\rangle$$
$$\lambda|ab\rangle = \frac{\hbar}{2}(a+b)|ab\rangle$$
$$|l, m\rangle = \left|\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right\rangle \quad \cancel{2}a = l+m, \quad \cancel{2}b = l-m$$

Посмотрим, какие могут быть l и m, если a и b – натуральные.



$l=0 \quad m=0$

$l=1/2 \quad m=-1/2;\ 1/2$

$m=-l;\ -l+1;\ \ldots 0 \ldots;\ l-1;\ l$

$$M_3|l,m\rangle = M_3\left|\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)|lm\rangle = m\hbar|lm\rangle$$

$$M^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle$$

! l – не длина вектора момента и не собственное значение M^2 – ни в каком смысле.

Коммутатор:

$$[M_i, p_l] = \varepsilon_{ijk}[r_j p_k, p_l] = -\varepsilon_{ijk}\frac{\hbar}{i}p_k\delta_{il} = -\frac{\hbar}{i}\varepsilon_{ilk}p_k$$

$$[M_i, p_l p_l] = -2\frac{\hbar}{i}\varepsilon_{ilk}p_k p_l = 0$$

Аналогично

$$[M_i, r_l r_l] = 0.$$

Оператор момента еще называют генератором поворотов.

Изменение координаты ф-ции в $\mathbb{R}^3$ можно рассматривать как действие M на r (радиус-вектор).

Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – направл. углы, то

$$\delta\varphi(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3)$$

Атом водорода:

С точки зрения классики это задача двух тел.

Помещение в центр тяжести начала координат оставляет 3 степени свободы.

На них приходится 3 наблюдаемых величины, а соответственно 3 оператора.

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + U(r) \qquad p_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r_i}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + U(r)$$

$$\psi(\underline{r})$$

Эти ф-ции должны быть собственными для M_3, M^2.

Но r не коммутирует с ними.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\psi(\underline{r}) \to \psi(r,\theta,\varphi)$$

V

$$\underline{M}^2 = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} r_j p_k r_l p_m = r^2\underline{p}^2 - (\underline{r}\underline{p})(\underline{r}\underline{p}) - \frac{\hbar}{i}\underline{r}\underline{p} =$$
$$= r^2\underline{p}^2 - \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r$$

Это дает выражение для квадрата импульса:

$$\underline{p}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\underline{M}^2$$

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} + U(r) - E\right\}\psi = 0$$
(условие того, что $H\psi = E\psi$)

$\{\underline{M}^2 - \hbar^2 l(l+1)\}\psi = 0$ (то же для $\underline{M}^2$)

$(M_3 - m\hbar)\psi = 0$ (то же для M_3)

Будем искать пси-ф-цию в виде:

$$\psi = \sum_{l,m} R_{lm}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

R ищем в виде: $R = \frac{\chi}{r}$, тогда

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2} - l(l+1)/r^2\right) + U(r) - E\right)\chi(r) = 0$$

$$\int_0^\infty \chi^*\chi \frac{1}{r^2} d\varphi\, d\cos\theta\, r^2 dr < \infty$$

т.о. $\int_0^\infty \chi^*\chi\, d\varphi\, dr < \infty$ (иначе не получится вероятностной интерпретации).

При $r \to 0$: $r^2\chi'' = l(l+1)\chi$

χ ищем в виде: $\chi = c r^{\varkappa+1}$

$\varkappa(\varkappa+1) = l(l+1)$

$\varkappa = l$, $\varkappa = -(l+1)$ (плохое повед. интеграла).

т.о. $\varkappa = l$

При $r \to \infty$: $\chi'' = \underbrace{-\frac{2\mu E}{\hbar}}_{k^2}\chi$

$$\chi = \underline{C_1 e^{-kr}} + C_2 e^{+kr}$$
годится только это.

Таким образом, учитывая поведение в 0 и ∞:

$\chi = e^{-kr} r^{l+1} f(r)$, $f(r)$ всюду конечна.

2.04.2004г.

Лекция № 22.

Условие собственных ф-ций (ф-ции в координатном представлении).

$\psi = \psi(\underline{r})$

В классике при повороте вокруг оси 3:

$\underline{r} \to \underline{r}' = \underline{r} + [\underline{r}, \underline{\varphi}]$, $\underline{\varphi}$ – малый вектор.

$\underline{r}' = \underline{r} + [\underline{r}, \underline{\varphi}] = M_3^{(\varphi)} \underline{r}$

В случае непрерывного спектра базис состоит из бесконечного несчетного множества функций.

$\underline{r}$ не есть собственная ф-ция M_3

Изменение $\underline{r}$ может быть представлено как действие $\hat{M}_3$ на волновую ф-цию $\psi(\underline{r})$

$\underline{r}$ есть оператор умножения на число.

Возьмем ф-цию $\psi(\underline{r}) = \underline{r}$. Она собственная для оператора координаты.

$M_3^{(\varphi)}$

$e^{i\varphi M_3}$

Если разложить $\psi(\underline{r})$ в ряд Тейлора, то мы будем знать, как действует оператор на каждый элемент, а значит, и на всю функцию.

В сферических координатах

$\underline{r} = (r\cos\underset{\text{широта}}{\theta}\cos\underset{\text{долгота}}{\varphi}, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)$

Оператор, т.о., просто добавляет некоторое число к φ.

M^2 тоже действует только на θ и φ, и не действует на r.

Т.о. для базиса из собств. ф-ций $\hat{H}$, $\hat{M}^2$ и $\hat{M}_3$ разумно выбрать представление в сферич. координатах.

$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + U(r) - E\right)\psi(\underline{r}) = 0$ из $H\psi = E\psi$

$(\underline{M}^2 - \hbar^2 l(l+1))\psi(\underline{r}) = 0$

$(M_3 - \hbar m)\psi(\underline{r}) = 0$

Вид в сферических координатах.

$$\underline{M}^2 = \hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

Будем искать ψ в виде:

$$\psi(\underline{r}) = \sum_{lm} Y_{lm} R_{lm}(r)$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}(-1)^m i^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+1)}} \cdot P_l^m(\cos\theta)$$

полином Лежандра.

$$R_{lm}(r) = \frac{\chi(r)}{r} \qquad \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d}{dr^2} - \underbrace{\frac{l(l+1)}{r^2}}_{\text{центробежн. потенциал}}\right) + U(r) - E\right)\chi = 0$$

$$\int dV \psi^*(\underline{r})\psi(\underline{r}) = 1$$

$$\left\{ r^2 dr\, d\cos\theta\, d\varphi = dV \Rightarrow \right.$$

$$\int_0^\infty dr\, \chi^2(r) = 1$$

$\chi(r)$ ищется в виде:

$$\chi = \underbrace{e^{-kr}}_{\text{сходимость на бескон.}} \underbrace{r^{l+1}}_{\text{сходим. в 0.}} f(r)$$, где $f(r)$ всюду конечна.

$$k = \sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$$ (волновой вектор)

Водородоподобные атомы и ионы.

$$U = -\frac{Ze^2}{r}$$

$$rf'' + (2(l+1) - 2kr)f' - \left(2k(l+1) - \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2}\right)f = 0$$

Уравнение на $f(r)$ $(f' = f'_r)$

$x = 2kr$:

$$xf'' + (2(l+1) - x)f' - \left(l + 1 - \frac{\mu Ze^2}{k\hbar^2}\right)f = 0$$

$$xf'' + (\gamma - x)f' - \alpha f = 0$$

$$f = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

(вырожденный гипергеометрич. ряд).

Этот ряд должен оборваться (иначе f не будет всюду конечна).

Оборваться он может, если α целое, отрицат.

$\alpha = -n_r = 0, -1, -2, \ldots$

$\alpha = l + 1 - \frac{\mu Z e^2}{k\hbar^2}$

$l + 1 - \underbrace{\frac{\mu Z e^2}{k\hbar^2}}_{n\ (\text{целое})} = -n_r \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\hbar^2}{\mu Z e^2} \updownarrow$

n_r – радиальное квантовое число

n – главное квантовое число.

$n = l + 1 + n_r = 1, 2, 3, \ldots$

$k = \sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}} \Rightarrow E = -\frac{k^2\hbar^2}{2\mu} = -\frac{\mu^2 Z^2 e^4 \hbar^2}{2\mu n^2 \hbar^4} = -\underbrace{\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}}_{R\text{ – постоянная Ридберга}} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$

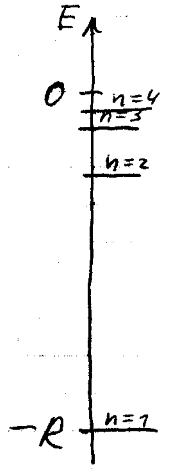
$\mu = \frac{m_e m_я}{m_e + m_я} \simeq m_e \Rightarrow$

$\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = R$ – постоянная Ридберга.

Формула $E = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$ – это нулевое приближение для атома водорода.

Если $\mu \simeq m_e$, то поправка $\sim 10^{-3}$.

Релятивистская поправка (спин) $\sim 10^{-2}$



Чем выше n, тем меньше расстояние между уровнями.

$Y_{lm} = e^{im\varphi} F(\theta)$

$M_z Y_{lm} = \hbar m \Rightarrow M_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

Релятивизация уравнения Шредингера.

Понятие спина.

Спин как дискретная степень свободы.

В классике: действие

$$S = -mc\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{-\dot{x}_i^2} +$$ $x_i = (\underline{r}, ict)$

$$+ \frac{e}{c}\int dt\, A_i(x)\,\dot{x}_i = \int dt\, L(x,\dot{x})$$

координ. данной частицы

$A_i = (\underline{A}, i\varphi)$ четырехм. потенц., где φ – скалярн. потенциал.

Четырехмерный импульс:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i + \frac{e}{c}A_i$$

импульс своб. част.

имп. част. в э/м поле

$$p_i = m\frac{(\dot{\underline{r}}, ic)}{\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}}} = (\underline{p}, \frac{i\mathcal{E}}{c})$$

$$\mathcal{E} = -L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}}}$$

$$\underline{p}^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m^2c^2$$

$$\underline{p}_i^2 = m^2\frac{\dot{r}^2 - c^2}{1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}} = -m^2c^2$$

$$\frac{\mathcal{E}}{c} = \pm\sqrt{m^2c^2 + \underline{p}^2}$$

в Кв. М: $-\frac{\hbar}{i}\dot{\psi}(\underline{r}) = H\psi(\underline{r})$

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dt} = H$$

$$\underline{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \underline{r}}$$

$$\pm\sqrt{m^2c^2 + \underline{p}^2}\,\psi = \frac{E}{c}\psi$$

$$\underline{p}^2 \downarrow -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial \underline{r}^2}$$

$f\left(\frac{\partial}{\partial \underline{r}}\right)\psi(\underline{p}) = f(\underline{p})\psi(\underline{p})$ (? что это)

$$\pm\sqrt{m^2c^2 + \underline{p}^2} + p_0 = p_0 \pm (\underline{\alpha}\,\underline{p} + \underbrace{\alpha_4 mc}_{\beta})$$

$\underline{\alpha}$ – три матрицы

$$(p_0 + \underline{\alpha}\,\underline{p} + \beta)(p_0 - \underline{\alpha}\,\underline{p} - \beta) = p_i^2 + m^2c^2$$

Минимальный ранг матриц $\underline{\alpha}$ и β − 4.

$\underline{\alpha} = \rho\begin{pmatrix} \underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \underline{\sigma} \end{pmatrix}$, $\underline{\sigma}$ − 2×2 (3 штуки)

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$\underline{\sigma}$ − матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\{p_0 \pm (\rho\,\underline{\sigma}\,\underline{p} + \alpha_4 mc)\}\psi = 0}$$ релятивистское уравнение Шредингера.

ψ должно быть столбцом 1×4

Т.о. была одна ф-ция, а стало четыре. Это говорит о наличии еще каких-то степеней свободы.

$$\underline{P} = \underline{p} + \frac{e}{c}\underline{A}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \underline{r}}$$

$$\underline{p} \to \underline{P} - \frac{e}{c}\underline{A}$$

$$p_0 \to p_0 + \frac{e}{c}\varphi, \quad p_0 = \frac{H}{c}$$

$$\left\{\frac{H}{c} + \frac{e}{c}\varphi \pm \left(\rho\,\underline{\sigma}\left(\underline{P} - \frac{e}{c}\underline{A}\right) + \alpha_4 mc\right)\right\}\psi = 0$$

$H \approx mc^2 + H_1$ (релятив. поправка)

$$\left(\frac{H}{c} + \frac{e}{c}\varphi\right)^2 = \left(\rho\,\underline{\sigma}\underbrace{\left(\underline{P} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)}_{B_i} + \alpha_4 mc\right)^2 \ominus$$

ρ^2 − числовая един. м-ца, коммут. со всем, что здесь есть.

$$\sigma_i B_i \sigma_k B_k = B_i^2 I + i\varepsilon_{ikl} B_i B_k \sigma_l = B_i^2 I + i\underline{\sigma}\,[\underline{B}\,\underline{B}]$$

$$\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} I + i\varepsilon_{ikl}\sigma_l$$

правило умн-ния σ

$$[\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A}, \underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A}] = -\frac{e}{c}\left([\underset{\text{вектора (?)}}{\underline{p}, \underline{A}}] + [\underline{A}, \underline{p}]\right) = -\frac{e}{c}\frac{\hbar}{i}\underset{(\text{ротор } \underline{A})}{\underline{\mathcal{H}}}$$

$$\ominus\ (\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A})^2 - \frac{e}{c}\underline{\sigma}\,\underline{\mathcal{H}} + m^2c^4 \approx m^2c^4 + 2mc^2H_1$$

$$\rho\alpha_4 + \alpha_4\rho = 0$$

Т.о. $\cancel{H_1 m}$ $(\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A})^2 - \frac{e}{c}\underline{\sigma}\,\underline{\mathcal{H}} = 2mc^2H_1$

$$H_1 = \frac{1}{2m}(\underline{p}-\frac{e}{c}\underline{A})^2 - \frac{\hbar e}{2mc}\underline{\sigma}\,\underline{\mathcal{H}} - e\varphi$$