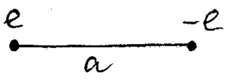

Если составить куб с чередованием вершин по заряду, то у полученной системы квадрупольный момент равен 0.

13.02.2004г. Лекция № 16

Диполь $\underline{d} = \sum_a e_a \underline{r}_a$

$\underline{r}_a \to \underline{r}_a' = \underline{r}_a + \underline{b}$

$\underline{d} \to \underline{d}' = \sum_a e_a \underline{r}_a' = \sum_a e_a \underline{r}_a + \sum_a e_a \underline{b}$

Т.о. если $\sum_a e_a = 0$, то $\underline{d} = \underline{d}'$, т.е. не зависит от выбора начала отсчета.

Скалярный потенциал:

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\underline{d}\underline{r}}{r^3}$$

Т.о. если $Q \neq 0$, то говорить о дипольном моменте не имеет смысла.

Понятие среднего:

$$A(\underline{r}, t) \quad \overline{A}(\underline{r}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt\, A(\underline{r}, t)$$

Среднее от производной по времени равно 0.

$$\dot{B}(\underline{r}, t) = \frac{\partial B(\underline{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overline{\dot{B}} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{\partial B}{\partial t} dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{B(T) - B(-T)}{2T} = 0$$

(т.к. движение финитно, то $B(T)$ и $B(-T)$ ограничены)

Уравнение Пуассона:

$$\Delta \varphi = 4\pi\rho$$

$$\Delta \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}$$

Разложение для вектор-потенциала:

$$\underline{A} = \frac{[\underline{m}\underline{r}]}{r^3} + \ldots$$

$$A_\alpha(\underline{r}) = \frac{1}{2c}\varepsilon_{\alpha\lambda\beta}\frac{r_\beta}{r^3}\underbrace{\int dV'[\underline{r}'\underline{j}]_\lambda}_{m_\lambda} \boxed{=}$$

m_λ - магнитный момент

$$\underline{j}(\underline{r}') = \sum_a \delta(\underline{r}' - \underline{r}_a) e_a \dot{\underline{r}}_a$$

// $\int dy\, f(y)\delta(x-y) = f(x)$

// $x\delta(x) = 0 : \int dx\, f(x) x\delta(x) = 0$

// $\int dy \cdot y\, \delta(x-y) f(y) = x f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

// $\int \delta(\overbrace{\varphi(x)}^{y}) f(x) dx = \int \delta(y) f(x(y)) dy \frac{dx}{dy} \ominus$

// $y = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = x_k$

// $\ominus \sum_k \frac{f(x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$

$$\boxed{=} \varepsilon_{\alpha\lambda\beta}\frac{r_\beta}{r^3}\underbrace{\frac{1}{2c}\sum_a [\underline{r}_a, e_a\dot{\underline{r}}_a]_\lambda}_{m_\lambda}$$

Механический момент $\underline{\ell}_a = [\underline{p}_a, \underline{r}_a]$

$\underline{p}_a = \dot{\underline{r}}_a m_a$

$$\underline{m}_a = \frac{e_a}{2cm_a}\underline{\ell}_a$$

гиромагнитное отношение

$A_i = \{\underline{A}, i\varphi\}$

$r_i = \{\underline{r}, ict\}$

$j_i = \{\underline{j}, ic\rho\}$

Уравнение Максвелла:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial r_i \partial r_k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial r_k^2} = \frac{4\pi}{c} j_i$$

$$A_k \to A_k' = A_k + \frac{\partial f}{\partial r_k}$$

Условие Лоренца:

$$\frac{\partial A_k}{\partial r_k} = 0$$

Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 A_k}{\partial r_k^2} = \dfrac{4\pi}{c} j_i & \text{– уравнение Д'аламбера} \\ \dfrac{\partial A_k}{\partial r_k} = 0 \end{cases}$$

Преобразование Фурье:

$$A_i(r) = (2\pi)^{-4} \frac{1}{i} \int d^4k \, e^{ik_i r_i} A_i(k), \quad k = \{\underline{k}, i\frac{\omega}{c}\}$$

$$k_k^2 A_i(k) = \frac{4\pi}{c} j_i(k)$$

$$k_k A_k(k) = 0$$

1) Рассмотрим случай $j_i = 0$ (свободное э/м поле):

$$A_k \to A_k'' = A_k + \frac{\partial g}{\partial r_k}$$

$\partial_e^2 g = 0$ (свободное волновое уравнение)

$$\frac{\partial A_k}{\partial r_k} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 g}{\partial r_k^2}}}_{0}$$ т.о. условие не изменилось

Т.о. можно добавлять градиент функции, удовлетворяющей свободному волновому уравнению.

Пользуясь этим, можно добиться $A_4 = 0$

Тогда условие Лоренца: $\underline{k}\underline{A} = 0$

Получаем систему: $\begin{cases} \underline{k}\,\underline{A} = 0 \\ (k_4^2 + \underline{k}^2)\underline{A} = 0 \end{cases}$

$(k_4^2 + \underline{k}^2)\underline{A} = 0$, может быть обеспечено, если $\underline{A}$ – обычная функция, умноженная на $\delta(k_4^2 + \underline{k}^2)$

Т.о. $\underline{A}(k) = \delta(k_4^2 + \underline{k}^2) \underline{E}(k)$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = (2\pi)^{-4} \frac{1}{c} \int d\omega \, d\underline{k} \, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)} \delta\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \underline{k}^2\right) \underline{E}(k) \ominus \qquad \omega = \pm ck$$

модуль производ. по ω $\left|\frac{2\omega}{c^2}\right| = \frac{2k}{c}$

$$\ominus (2\pi)^{-4} \int d\underline{k} \left\{ e^{i(\underline{k}\underline{r} - ckt)} \underline{E}(ck, \underline{k}) + e^{i(\underline{k}\underline{r} + ckt)} \underline{E}(-ck, \underline{k}) \right\} =$$

$$= (2\pi)^{-4} \int d\underline{k} \left\{ e^{i(\underline{k}\underline{r} - ckt)} \underline{E}^-(\underline{k}) + e^{i(\underline{k}\underline{r} + ckt)} \underline{E}^+(\underline{k}) \right\} \mp$$

$$\underline{E}^\pm(-\underline{k}) = (\underline{E}^\pm(\underline{k}))^*$$

$$\underline{A}(\underline{r},t)=(2\pi)^{-4}\int\frac{d\underline{k}}{2k}\left\{e^{-ickt+\underline{k}\underline{r}}\underline{E}(\underline{k})+e^{ickt-\underline{k}\underline{r}}\underline{E}^*(\underline{k})\right\}$$

$$\underline{E}=-\frac{\partial A}{\partial t}=i\int\frac{d\underline{k}}{2k}ck\{e^{\cdots}\underline{E}-e^{\cdots}\underline{E}^*\}\cdot(2\pi)^{-4}$$

$$\underline{H}=[\underline{\nabla}\underline{A}]=(2\pi)^{-4}i\int\frac{d\underline{k}}{2k}c[\underline{k}\{e^{\cdots}\underline{E}-e^{\cdots}\underline{E}^*\}]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{H}(\underline{k})=[\underline{k}\,\underline{E}(\underline{k})]\frac{1}{k}\\ \underline{k}\,\underline{E}(\underline{k})=0\end{array}}$$

Одно значение k – монохроматическая волна, распространяется по вектору $\underline{k}$ с частотой $\omega=ck$.

Плотность электромагнитного поля:

$$\mathcal{E}=\int d\underline{r}\,\frac{\underline{E}^2(\underline{r})+\underline{H}^2(\underline{r})}{4\pi}$$ – плотность энергии

$$\underline{P}=c\int d\underline{r}\,\frac{[\underline{E}\,\underline{H}]}{4\pi}$$ – импульс

Измерение дипольных моментов:

$$\varphi=\frac{\underline{d}\,\underline{r}}{r^3}\qquad \underline{E}=-\nabla\varphi$$

$$\underline{E}=\frac{\underline{d}r^2-3\underline{r}\,\underline{d}\underline{r}}{r^5}.$$

Лекция № 17

20.02.2004г.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}A_i(x)=-\frac{4\pi}{c}j_i(x)\;;\quad\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0;\quad j_i=\sum_a e_a\delta(\underline{a}-\underline{x}_a(t))\times\{\underline{\dot{x}}_a,ic\}$$

$$A_i(x)=(2\pi)^{-4}\frac{1}{i}\int d^4k\,e^{ik_jx_j}A_i(k)\;;\quad k=\{\underline{k},\frac{i\omega}{c}\}$$

$$k_j^2A_i(k)=\frac{4\pi}{c}j_i(k)$$

$$A_i(x)=(2\pi)\frac{4\pi}{c}\cdot\frac{1}{i}\int d^4y\,G(x-y)j_i(y)$$

$$G(x-x')=(2\pi)^{-4}\frac{1}{i}\int d^4k\,\frac{1}{k_j^2}e^{ik_\ell(x_\ell-x'_\ell)}=\frac{1}{4\pi}\theta(t-t')\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\times$$

$$\times\left[\delta(|\underline{x}-\underline{x}'|-c(t-t'))-\underbrace{\delta(|\underline{x}-\underline{x}'|+c(t-t'))}_{0}\right]$$

В итоге:

$$A_i(\underline{x},t) = \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{1}{4\pi}\int d\underline{x}'\,\frac{j_i(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}$ - время запаздывания,

поэтому это выражение называют запаздывающими потенциалами.

$$A(\underline{R},t) = \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{1}{4\pi}\int d\underline{r}'\,\frac{j_i(\underline{r}', t - \frac{|\underline{R}-\underline{r}'|}{c})}{|\underline{R}-\underline{r}'|}$$, $\underline{R}$ - большое, $\underline{r}'$ - маленькое

$$|\underline{R} - \underline{r}'| = R - \frac{\underline{r}'\underline{R}}{R} + \ldots = R - \underline{n}\underline{r}' \;, \quad \underline{n} = \frac{\underline{R}}{R}$$

Временной аргумент у тока:

$$t - \frac{|\underline{R}-\underline{r}'|}{c} = \frac{1}{c}\{\underbrace{ct - R}\ + \underbrace{\underline{n}\underline{r}'}_{b} + \ldots\}$$

при финитном движении это выражение ограничено и имеет порядок длины волны. $\lambda \sim ct$

b - размер системы.

Э/м поле на большом расстоянии от системы:

$R \gg b$

$$\underline{A}(\underline{R},t) = \frac{1}{cR}\int d\underline{r}'\,\underline{j}(\underline{r}', t - \frac{R}{c} + \frac{\underline{n}\underline{r}'}{c})$$

$R \gg \lambda$, где λ - длина волны типичного волнового процесса.

Будем рассматривать в волновой зоне

$$\frac{\partial}{\partial R_\alpha} = -\frac{n_\alpha}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial \underline{R}} = 0;$$

$$\varphi = c\int dt\,\frac{\partial \underline{A}}{\partial \underline{R}} + \varphi_{кул.}; \qquad \frac{\partial R}{\partial R_\alpha} = \frac{R_\alpha}{R}.$$

$\varphi_{кул.}$ - кулоновский потенциал, не зависит от времени.

$$\underline{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{R}} - \frac{1}{c}\dot{\underline{A}} = \underline{E}_{кул.} - c\int dt\,\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\,\underline{A}) - \frac{1}{c}\dot{\underline{A}}$$

$$[\underline{\nabla}\underbrace{[\underline{\nabla}\,\underline{A}]}_{\underline{H}}] + \cancel{\nabla^2 \underline{A}} + \cancel{(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2})\underline{A}}$$ $\to 0$, $\to 0$

$\Downarrow$

$$\underline{E} = \underline{E}_{кул} + c\int dt\,\mathrm{rot}\,\underline{H}.$$

В волновой зоне:

$$\varphi = \underline{n}\,\underline{A}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{c}[\dot{\underline{A}}, \underline{n}]$$

$$\underline{\underline{E}} = [\underline{H}, \underline{n}]$$

$$\underline{S} = \frac{4\pi}{c}[\underline{E}, \underline{H}] = \frac{cH^2}{4\pi}\underline{n}$$ – плотность импульса

$dJ = \underline{S}\,\underline{n}\,d\Omega R^2$, поток через площадку;
$d\Omega R^2$ – площадка

$$dJ = c\underline{H} - R^2\frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$A_\alpha = \frac{1}{cR}\left\{\underbrace{\dot{d}_\alpha\left(t-\frac{R}{c}\right)}_{\text{дипольн. момент системы}} + \underbrace{[\dot{\underline{m}}\,\underline{n}]_\alpha}_{\text{магнит. момент}} + \underbrace{\frac{1}{2c}\ddot{d}_{\alpha\beta}n_\beta}_{\text{квадрупольн}}\right\}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{c^2R}[\ddot{\underline{d}}\,\underline{n}]$$

$$\underline{S} = \frac{n}{4\pi R^2}\cdot\frac{[\ddot{\underline{d}}\,\underline{n}]}{c^3}\ ; \quad -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int\frac{\underline{\underline{E}}^2 d\Omega}{4\pi}$$

Применим это к атому водорода.
Основное состояние, когда момент равен 0, в классике это вращение по кругу

$$\underline{d} = -r_0 e\{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$r_0 = \frac{Ze^2}{2|\mathcal{E}|}$$ (Z – заряд ядра)

$$\omega^2 = \frac{Ze^2}{\mu r_0^3}$$

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int dJ = \frac{\overline{[\ddot{\underline{d}}\,\underline{n}]^2}}{c^3} = \frac{\overline{\ddot{d}^2 - (\ddot{\underline{d}}\,\underline{n})^2}}{c^3} = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} = \frac{2}{3c^3}r_0^2\omega^2 e^2$$

$$dJ = \frac{[\ddot{\underline{d}}\,\underline{n}]^2}{c^3}\cdot\frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{Ze^2}{2r_0} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{c^3}(r_0\omega e)^2$$

$$-\frac{dr_0}{dt} = \frac{4c}{3}Z\left(\frac{\overset{2{,}8\cdot 10^{-13}}{\frac{e^2}{\mu c^2}}}{\underset{10^{-8}}{r_0}}\right) = 1\ \text{см/сек}$$

Т.о. с точки зрения классики, время жизни атома водорода составляет 10^{-8}с.

5.03.2004г.

Лекция № 18

Квантовая механика.

Есть фазовое пространство. Есть точка, которая движется в пространстве (есть траектория движения). Для каждой точки пространства есть вероятность, насколько близко траектория „подходит" к ней (можно рассчитать распределение вероятности). Усреднение по времени движения этой точки эквивалентно усреднению по распределению вероятности траектории (эргодическая гипотеза).

Такая гипотеза не доказана; она выполняется для систем с большим количеством частиц.

$$\overline{f(q,p)} = \int dp\,dq\, f(p,q)\, e^{\frac{\Psi - H(q,p)}{kT}}$$

усредн. зн-ние
ф-ции системы
(ф-ция распред.
для всех частиц)

12.03.2004г. Лекция № 19

В явлениях, происходящих на расстояниях $\leq 10^{-8}$ см, не оправдывается неявное предположение о возможности сколь угодно точного измерения двух динамических переменных.

Если имеются состояния а и в, то их суперпозиция — это или а, или в с определенной вероятностью.

Для описания состояний используется линейное пространство.

Есть объект, переводящий один элемент ЛП в другой.

Если ЛП — конечномерно, то это матрица.

Постулат: динамическая переменная — матрица, а собственное число матрицы — значение ее в данном состоянии.

Состоянию с данным значением динамической переменной соответствует множество элементов ЛП (если h — соб. вектор, то Ch — тоже соб. в., соотв. тому же собств. зн-нию).

$|A\rangle$ — вектор-столбец.

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$\langle A|$ — вектор-строка:

$$\langle A| = (A_1\ A_2 \dots A_n)$$

Т.о. оказывается введена пара ЛВП.

Состояние описывается парой векторов из двух ЛВП.

Динамическим переменным отвечают только квадратные матрицы (только они переводят строку/столбец в такую же).

$\alpha|A\rangle$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ \alpha_{21} & \dots & \\ & \dots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} A_k \\ \dots \\ \alpha_{nk} A_k \end{pmatrix}$$

Большинство ЛВП, описывающих состояния, бесконечномерны (как и матрицы)

Эти ЛВП комплексны и $|A\rangle$, и $\langle A|$ и матр. α содержат $\mathbb{C}$-числа.

Имеет место свойство:

$\alpha|A\rangle = a|A\rangle$

a – собственное значение, $|A\rangle$ – собственный вектор матрицы α.

Очевидно, что

$\alpha|\lambda A\rangle = a|\lambda A\rangle$, где λ – $\mathbb{C}$-число

Поэтому каждому состоянию соотв. т.н. класс эквивалентностей

$$\langle A|\alpha = (A_1\ A_2 \dots A_n)\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ \alpha_{21} & \dots & \\ & \dots & \end{pmatrix} = (A_k\alpha_{k1} \dots A_k\alpha_{kn})$$

Чтобы $A_k\alpha_{k1} = A_k\alpha_{k1}$ матрица α должна быть симметричной.

Собственное значение – результат измерения динамической переменной, она вещественна, а значит, матрица α должна быть эрмитовой.

В терминах Дирака:

$|A\rangle$ – вектор

$\langle A|$ – ковектор

$\langle A|B\rangle$ – аналог скалярного произведения.

При этом $\langle A|B\rangle = \langle B|A\rangle^*$ (так выбрано).

Тогда скалярный квадрат: $\langle A|A\rangle = \langle A|A\rangle^*$, а значит, норма вещественна.

Эрмитово сопряжение:

$\langle B|\alpha|A\rangle = \langle A|\alpha^+|B\rangle^*$

Если α – бесконечномерна, то α – оператор.

α^+ – эрмитовосопрят. к α

Если $\alpha^+ = \alpha$, то α – эрмитов оператор.

~~Ди~~ У эрмитовых операторов вещ. собств. зн-ния.

Т.о. наблюдаемым величинам соответствуют эрмитовы операторы. Состояниям отвечают классы эквивалентностей бесконечных ЛВП, снабженных описанной билинейной операцией.

$\langle A|\alpha|A\rangle = a\langle A|A\rangle$

Если $\langle A|A\rangle = 1$, т.е. вект. нормиров, то

$\boxed{\langle A|\alpha|A\rangle = a}$ – т.к. борновская интерпретация квантовой механики.

Если все собственные вектора различны, то их можно выбрать в качестве базиса.

$\alpha|A\rangle = a|A\rangle$

$\alpha|\alpha_i\rangle = \alpha_i'|\alpha_i\rangle$

Возьмем $|\alpha_i\rangle$ и $|\alpha_j\rangle$: $\alpha_i' \neq \alpha_j'$

Тогда их скалярное произведение нуль.

Докажем: ▨

$\langle\alpha_i|\alpha|\alpha_j\rangle = \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle\alpha_j' = \alpha_i'\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle \Rightarrow$

$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle(\alpha_j' - \alpha_i') = 0$; $\alpha_i' \neq \alpha_j' \Rightarrow \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = 0$. ▨

Возьмем такие $|\alpha_i\rangle$, что $\langle\alpha_i|\alpha_i\rangle = 1$

$\alpha|\alpha_i\rangle = \alpha_i'|\alpha_i\rangle$

$|A\rangle = \sum_i a_i|\alpha_i\rangle$

$\langle\alpha_j|A\rangle = \sum_i a_i\underbrace{\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle}_{\delta_{ij}} = a_j$ $\quad\langle\alpha_j|A\rangle = \sum_i a_i\underbrace{\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle}_{\delta_{ij}}$

Множество собств. зн-ний оператора – спектр.

$|A\rangle = \int d\alpha' a(\alpha')|\alpha'\rangle$ – случай непрерывного спектра.

Условие нормировки в непрерывном спектре:

$\langle\alpha'|\alpha''\rangle = \delta(\alpha'-\alpha'')$

$\langle\alpha''|A\rangle = \int d\alpha' a(\alpha')\underbrace{\langle\alpha''|\alpha'\rangle}_{\delta(\alpha'-\alpha'')} = a(\alpha'')$

Рассмотрим такие операторы α и β, что

$\alpha\beta = \beta\alpha$.

Докажем, что у них общие собственные векторы:

$\alpha\beta|\alpha'\rangle = \beta\alpha|\alpha'\rangle = \alpha'\beta|\alpha'\rangle$

Т.о. $\beta|\alpha'\rangle$ есть собств. вектор α, а значит

$\beta|\alpha'\rangle = \beta'|\alpha'\rangle$

Т.е. $|\alpha'\rangle$ - собств. вектор β с собств. зн-нием β' ■

Выберем среди коммутирующих операторов такие, что:

Если $[\omega, \alpha_i] = 0$, то $\omega = f(\alpha_i)$

α_i - полный набор коммут. операторов.

$[f(\alpha), \alpha_i] = 0$ (исходя из разл. $f(\alpha)$ в ряд Тейлора, т.к. все α_i коммут., то порядок не важен).

$[f(\alpha), \alpha_i] = 0 \Rightarrow f(\alpha)|\alpha'\rangle = f(\alpha')|\alpha'\rangle$

$\sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\alpha^n|\alpha'\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(\alpha')^n|\alpha'\rangle = \left\{\sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(\alpha')^n\right\}|\alpha'\rangle$

Представление - это выбор базиса, т.е. полного набора коммутирующих операторов.

Возьмем систему из 1 мат. точки с 3 степенями свободы.

В гамильтоновой механике r_i, p_i ; $i = 1,2,3$

Скобка Пуассона: $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_k}$

$\{p_i, q_j\} = \delta_{ik}\delta_{jk} - 0 = \delta_{ij}$

Эти переменные имеют ~~канонич.~~ простейшую С.П., поэтому называются каноническими.

Постулат квантования: каждой скобке Пуассона канонических переменных сопоставляется коммутатор соответствующих операторов.

$\{p_i, q_i\} \leftrightarrow [p_i, q_i]$

$[p_i, q_i] = \delta_{ij} \frac{\hbar}{i}$

Постулат квантования Гейзенберга:

$$\boxed{[p_i, q_i] = -i\hbar\delta_{ij}}$$

Переход к квантовой механике есть переход от абелевой алгебры к алгебре Гейзенберга.

19.03.2004г.

Лекция № 20

Пространство состояний.

$[p_i, q_j] = \delta_{ij}\frac{\hbar}{i}$

Рассмотрим одномерный случай:

$[p, q] = \frac{\hbar}{i}$

$a^{\pm} = \frac{p \pm i\omega q}{\sqrt{2\omega\hbar}}$

Из $[p,q] = \frac{\hbar}{i} \Rightarrow [a^-, a^+] = 1$

$[a^-, a^+] = \frac{1}{2\omega\hbar}[p - i\omega q, p + i\omega q]$

// $[a, b] = ab - ba$

$[a, \lambda b + \mu c] = a(\lambda b + \mu c) - (\lambda b + \mu c)a =$

$= \lambda ab + \mu ac - \lambda ba - \mu ca =$

$= \lambda(ab - ba) + \mu(ac - ca) = \lambda[a,b] + \mu[a,c]$

Коммутатор линеен по каждому объекту //

$[a^-, a^+] = \frac{1}{2\omega\hbar}[p - i\omega q, p + i\omega q] = \frac{1}{2\omega\hbar}\{\underbrace{[p,p]}_{0} - i\omega\overbrace{[q,p]}^{-\frac{\hbar}{i}} + i\omega\overbrace{[p,q]}^{\frac{\hbar}{i}} -$

$- (i\omega)^2\underbrace{[q,q]}_{0}\} = \frac{1}{2\omega\hbar}\cdot 2\omega\hbar = 1$, т.е. $[a^-, a^+] = 1$.

Доказано.

<u>Утверждение:</u> a^+a^- – эрмитов.

$(a^+a^-)^+ = (a^-)^+(a^+)^+ = a^+a^-$ (т.к. p и q – эрмитовы)

Т.к. $a^+a^- = (a^+a^-)^+$, то a^+a^- – эрмитов по определ.

Доказано

a^+a^- – положительный, т.е. его усреднение по любому состоянию ≥ 0:

$\langle A | a^+a^- | A\rangle \geq 0$

базис $|\xi_i\rangle$

Введем объект – вектор дуального пространства:

$|\xi_i\rangle\langle\xi_i|$

<u>Утверждение</u>: это оператор. $I = |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$

Подействуем им на базисный вектор:

$|\xi_i\rangle\langle\xi_i|\xi_k\rangle = |\xi_k\rangle$

Т.о. $I|\xi_k\rangle = |\xi_k\rangle$

Т.к. определено действие I на любой элемент базиса, то это оператор, при том единичный. Доказано

$$\langle A|\underset{\hat{I}}{a^+a^-}|A\rangle = \langle A|a^+|\xi_i\rangle\langle\xi_i|a^-|A\rangle \ominus$$

$\langle A|b|B\rangle = \langle B|b^+|A\rangle^*$ $\Rightarrow$ т.к. a^+ и a^- эрмитово сопряж., то
эрмитово сопряжение

$\ominus\ |\langle\xi_i|a^-|A\rangle|^2 \geq 0$
сумма модулей
(т.к. квадр, то i 2раза)

У положит. оператора все собственные значения неотрицательны.

$n = a^+a^-$

$|n'\rangle$ собств. в-ра: $n|n'\rangle = n'|n'\rangle$

$a^-n|n'\rangle = a^-a^+a^-|n'\rangle \ominus$

$[a^-, a^+] = 1 \Rightarrow a^-a^+ = a^+a^- + 1$

$= (1 + \underbrace{a^+a^-}_{n})a^-|n'\rangle$; $a^-n|n'\rangle = a^-n'|n\rangle = n'a^-|n\rangle \Rightarrow$

$na^-|n'\rangle = (n'-1)a^-|n'\rangle$

Т.о. действие a^- на собств. вектора n уменьш. собств. зн-ние на 1.

Т.к. n – положит., то среди собств. векторов n обязательно сущ. вектор:

$a^-|0\rangle = 0$.

Этот вектор называется вакуумным.

Соответственно, действие a^+ увелич. на единицу

Т.о. все векторы n можно построить, действуя a^+ на вакуум.

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$$

Пространство с таким базисом называется пр-вом Фока.

Он ортонорм. $\langle n'|n''\rangle = \delta_{n'n''}$

a^- - оп-р уничтожения

a^+ - оп-р рождения

n - оп-р числа частиц

$|0\rangle$ - состояние "нет частиц"

$|1\rangle$ - состояние с 1 частицей

$|n\rangle$ - с n частицами.

Число частиц - пока формальное понятие.

Сами по себе операторы $a^\pm$ не имеют физ. интер.

Выражение p и q через $a^\pm$:

$$p=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^+ + a^-),\quad q=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a^+ - a^-)$$

$$\langle n'|q|n''\rangle = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\langle n'|a^+|n''\rangle - \langle n'|a^-|n''\rangle\right) \ominus$$

$$a^+|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^{n+1}|0\rangle = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}(a^+)^{n+1}|0\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\ominus \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\Big(\underbrace{\langle n'|n''+1\rangle}_{\delta_{n',n''+1}}\sqrt{n''+1} - \underbrace{\langle n'||n''-1\rangle}_{\delta_{n',n''-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n''}}\Big)$$

Матрица q:

$$\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\cdot\begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{1} & 0 & \dots \\ -i\sqrt{1} & 0 & i\sqrt{2} & 0 \dots \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{3} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Матрица p:

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Перейдем к базису координат.

Найдем ~~такие~~ собственные вектора q:

$$q|q'\rangle = q'|q'\rangle$$

$$\langle n'|\underset{|n''\rangle\langle n''|}{q\,\hat{}}|q'\rangle = q'\langle n'|q'\rangle$$

$$\langle n'|q|n''\rangle\underbrace{\langle n''|q'\rangle} = q'\underbrace{\langle n'|q'\rangle}_{\begin{pmatrix} c_0(q') \\ c_1(q') \\ c_2(q') \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}$$

$$\sqrt{\frac{2w}{\hbar}}\,q' = x$$

$$c_n = \frac{2}{i\sqrt{n}}c_{n+1} + \sqrt{\frac{n-1}{n}}c_{n+1}$$ рекуррентная система уравнений.

Ее решение – полиномы Эрмита.

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2}\left(-\frac{d}{d\xi}\right)e^{-\xi^2}$$

$$H_n = 2\xi H_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}$$

$$c_n(x) = (-i)^n\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)c_0(x)$$

$$c_0(x) = \left(\frac{w}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-x^2/2}$$

q – имеет непрерывный спектр.

Тогда условие нормировки: $\langle q'|q''\rangle = \delta(q'-q'')$

$d_n = \langle n|p\rangle$. Это тоже полиномы Эрмита.

$c_n = \langle n|q\rangle$

$$\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipq}{\hbar}}$$

Т.е переход от p к q – преобразование Фурье.

$$\langle q'|p|q''\rangle = \int dp'dp''\langle q'|p'\rangle\underbrace{\langle p'|p|p''\rangle}_{p'\delta(p'-p'')}\langle p''|q''\rangle =$$

$$= \int dp'\,p'\,e^{-ip'q'/\hbar + ip'q''/\hbar}\frac{1}{2\pi\hbar} \ominus \int dp' e^{ip'(-q'+q'')/\hbar} =$$

$$= 2\pi\delta(q'-q'')$$

$$\int dp' e^{ip'(-q'+q'')/\hbar} = 2\pi\delta(q'-q'')$$

$$\ominus\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q'}\delta(q'-q'') \iff$$