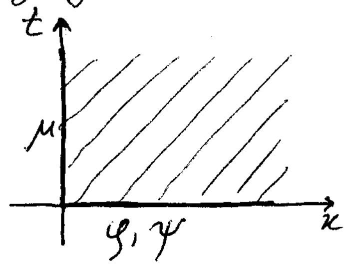
Полуограниченная задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t=0, x) = \varphi(x) \\ u_t(t=0, x) = \psi(x) \\ u(t, 0) = 0 \end{cases}$$



Если начальные ф-ции нечетны относительно какой-то точки x, то при $\forall t$ решение $u(t,0)=0$

Пусть $x=0$, тогда

$$u(t,0) = \frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(x)dx = 0$$

Продолжив нечетным образом ф-ции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы зададим $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ на всей числовой оси — т. е. задачу Коши.

Рассмотрим случай:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u(t,0) = \mu(t) \end{cases}$$

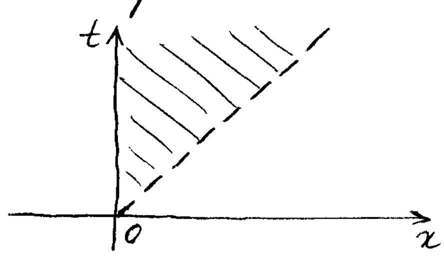
$u(t,x) = g(x-at)$ есть решение нашего уравнения.

$$u(t,0) = g(-at) \equiv \mu(t) \Rightarrow$$

$$g(\alpha) \equiv \mu\left(-\frac{\alpha}{a}\right) \Rightarrow$$

$$u(t,x) \equiv \mu\left(\frac{at-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Это решение в области:



$$\tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Т.о. Полное решение: $u(t,x) = \tilde{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$

Окончательное решение (для самой общей задачи):

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x)dx+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\alpha,\tau)\,d\alpha\, d\tau+\tilde{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

Параболические уравнения.
Формула Пуассона.

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} \\ u(t=0,x)=\varphi(x) \end{cases}$$ – задача Коши (иногда это записывают как $\lim\limits_{t\to+0}u(t,x)=\varphi(x)$)

Решение u должно помимо основных ($\exists u_t$, $\exists u_{xx}$) должна удовлетворять еще двум условиям:

1) $|u(t,x)|\le M$

2) $\lim\limits_{t\to+0}u(t,x)=\varphi(x)$

Предположим, что $u(x,t)\overset{?}{=}X(x)\cdot T(t)$

Подставим:

$T'(t)X(x)=a^2X''(x)T(t)$;

$\frac{T'}{T}=a^2\frac{X''}{X}$;

$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}\equiv const$ (лишь в этом случае возможно равенство при любых x и t)

$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$

$X''+\lambda^2X=0 \Rightarrow X(x)=e^{\pm i\lambda x}$

$T'+\lambda^2a^2T=0 \Rightarrow T(t)=e^{-\lambda^2a^2t}$

$u(t,x)=A(\lambda)e^{-\lambda^2a^2t\pm i\lambda t}$

Требование $const<0$, т.е. $-\lambda^2$ отбрасывает неограниченные решения.

$u(t,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)e^{-\lambda^2a^2t\pm i\lambda x}d\lambda$ – решение (сумма – т.е. лин. комб. – по всем λ – они непр.)

$u(0,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\varphi(x) \Rightarrow$

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \quad \text{(преобразование Фурье)}$$

Решение т.о. имеет вид:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right]e^{-\lambda^2a^2t+i\lambda x}d\lambda.$$

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right]e^{-\lambda^2a^2t+i\lambda x}\,d\lambda$$

или

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t+i\lambda(x-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi\,d\lambda=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda}_{\text{этот несобственный интеграл вычисляется диф-нием по пар-ру.}}\Big]\varphi(\xi)\,d\xi \ominus$$

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$ (G называют ф-цией Грина

$$\ominus\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$\boxed{u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi}$$ – этот вид решения называется формулой Пуассона.

29.04.2004г.

Лекция № 11

<u>Условия</u>: ф-ция $A(\lambda)$ должна допускать преобразование Фурье.

Чтобы переставлять порядок интегрирования в несобственном интеграле нужна равномерная сходимость.

В таком виде формула Пуассона формальна. Нужно провести аргументацию.

Формально следовало бы провести следующие выкладк

1) Рассматривать формулу на $t>0$.

2) Взять производные: $G'_t=\ldots$

$G'_x=\ldots$

$G''_{xx}=\ldots$

4) Доказать, что для любого $t>0$ интеграл сходится равномерно – тогда производную и интеграл можно менять местами.

Аналогично для G'_x и G''_{xx} (имеется в виду ин-л G).

После этого можно убедиться, что $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению.

5) Проверка условия $u(t=0,x)=\varphi(x)$

$$\lim_{t\to+0} u(t,x)=\varphi(x)$$

Чтобы перейти к пределу нужно доказать равномерную сходимость исходного интеграла.

6) Доказать, что решение ограничено.

Это доказывается из допущения, что ф-ция $\varphi(x)$ ограничена.

Неоднородное уравнение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \\ |u(t,x)| \le M \end{cases}$$

Решение задачи, когда $\varphi(x)\equiv 0$:

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

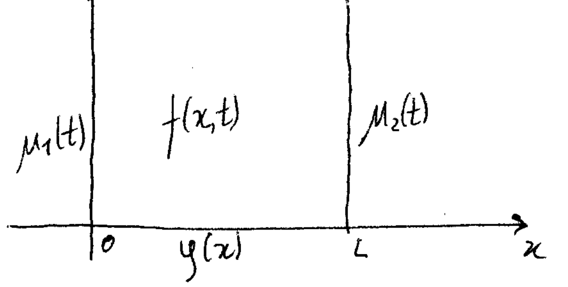
Доказательство здесь аналогично доказательству в случае формулы Пуассона.

Т.о. общее решение имеет вид:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

В случае с полуограниченной задачей поступают аналогично случаю с гиперболическим уравнением.

Краевая задача решается методом Фурье одинаково для всех типов уравнений.



Задача линейна и можно сделать такую замену, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(t,x) \\ v|_{t=0} = 0 \\ v|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x$$

Будем искать v в виде:

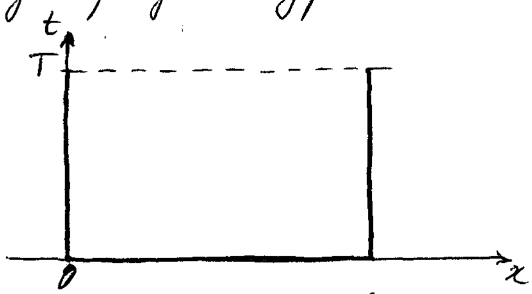
$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(t) \cos 2\pi k x + \beta_k(t) \sin 2\pi k x.$$

При каждом k получается система д.у. первого порядка из двух ур-ний с двумя неизв. (при условии, что известны a_k и b_k).

Единственность решения.

<u>Теорема Принцип максимума:</u>
Рассмотрим однородное ур-ние и краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \\ |u(t,x)| \le M \\ u(t,0) = \mu_1(t) \\ u(t,L) = \mu_2(t) \end{cases}$$



Можно взять и зафиксировать любое T. Тогда в этой области („пунктир" - T - туда не входит) максимальное и минимальное значение достигаются на границе и только.

<u>Доказательство</u>

Докажем от противного.

Обозначим $M = \max\limits_{\Gamma} u(t,x)$

Пусть нашлась такая точка $(t_0, x_0) \in \Omega$, что $u(t_0, x_0) = M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

$\exists\, (t_0, x_0) \in \Omega : \; u(t_0, x_0) = M + \varepsilon, \; \varepsilon > 0$

Вспомогательная функция $v(t,x) = u + k \cdot (t_0 - t)$, $k > 0$

Тогда $v(x_0, t_0) = u = M + \varepsilon$

С другой стороны $k(t_0 - t) \le k \cdot T < \frac{\varepsilon}{2}$ (можно так подобрать k

$$0 < k < \frac{\varepsilon}{2T}$$

$v|_\Gamma = u|_\Gamma + k(t_0 - t)|_\Gamma < M + \varepsilon/2$

Можно утверждать, что $\exists\, (t_1, x_1) : v(t_1, x_1) \ge v(t_0, x_0) = M + \varepsilon$

$(t_1, x_1) \in \Omega$

Т.к. в этой точке достигается наибольшее значение, то $u_{xx} \equiv v_{xx} \le 0$

$u_t(t_1, x_1) = v_t(t_1, x_1) + k > 0$ (т.к. в т. макс. $v_t = 0$, $k > 0$).

Но тогда $u(t,x)$ не удовл. уравнению в (t_1, x_1):

$a^2 u_{xx} \le 0$, $u_t > 0 \Rightarrow u_t \ne a^2 u_{xx}$.

Имеем противоречие.

Доказано.

Принцип минимума доказывается аналогично ($w=-u$).

Из этого принципа следует единственность решения. Если есть решения u_1 и u_2, то есть и решение $u\equiv u_1-u_2$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u|_\Gamma\equiv 0\end{cases}\Rightarrow u(t,x)\equiv 0$$

Это теорема единственности.

Ее еще называют следствием 1 из принципа максимума.

<u>Следствие 1</u>. Теорема единственности.

<u>Следствие 2</u>. Пусть есть решения двух краевых задач $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$.

Про них известно, что $u_1|_\Gamma\le u_2|_\Gamma$ (это можно проверить по данным задачи).

Тогда всюду в Ω $u_1\le u_2$.

Рассмотрим $v\equiv u_2-u_1$. v удовл. уравнению и $v|_\Gamma\ge 0\Rightarrow$ из принципа максимума $v|_\Omega\ge 0$.

<u>Следствие 3</u>. Пусть на границе $u_1|_\Gamma\le u\le u_2|_\Gamma$ (решения 3 задач).

Тогда всюду в Ω $u_1\le u\le u_2$

<u>Следствие 4</u>. Пусть $|u_1-u_2||_\Gamma\le\varepsilon$, тогда всюду в Ω $|u_1-u_2||_\Gamma\le\varepsilon$

$|u_1-u_2||_\Gamma\le\varepsilon:\ u_2-\varepsilon|_\Gamma\le u_1|_\Gamma\le u_2+\varepsilon|_\Gamma\Rightarrow$ то же в Ω

<u>Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий</u>:

Если начальные условия на границе отличаются на некоторое δ, то решения будут отличаться не более, чем на δ.

Регуляризацией задачи называется такая ее переформулировка, что решение становится устойчивым, а отличается незначительно.

<u>Теорема единственности для задачи Коши.</u>

Два решения u_1 и u_2 задачи $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ |u(t,x)|\le M.\end{cases}$

$v \equiv u_1 - u_2$

$|u| \le 2M$

Рассмотрим вместо всей числовой оси отрезок $|x| \le L$

Вспомогательная функция:

$$V(t,x) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

Эта ф-ция удовлетворяет уравнение (что легко проверяется напрямую).

Эта ф-ция непрерывна:

$$V(0,x) \ge |v(0,x)| \equiv 0$$

$$V(t,\pm L) \geqq \frac{4M}{L^2}\left(\frac{L^2}{2} + a^2 t\right) \ge \frac{4M}{L^2}\cdot\frac{L^2}{2} \equiv 2M$$

$$V(t,\pm L) \ge 2M \ge |v(t,\pm L)|$$

Т.о. $V_\Gamma \ge |v|_\Gamma| \Rightarrow$ по следствию 2 всюду в Ω $V \ge |v|$

Т.е. $v(t,x) \le \frac{4M}{L^2}$/

Т.е. $-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \le v(t,x) \le \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$

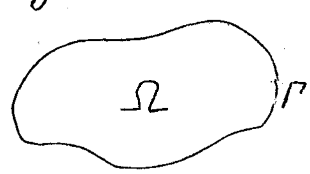
При $L \to \infty$ $0 \le v(t,x) \le 0 \Rightarrow v(t,x) \equiv 0$

Доказано.

Эллиптическое уравнение.

Лапласиан: $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\ (x,y,z) \in \Omega$

$u|_\Gamma = \varphi$

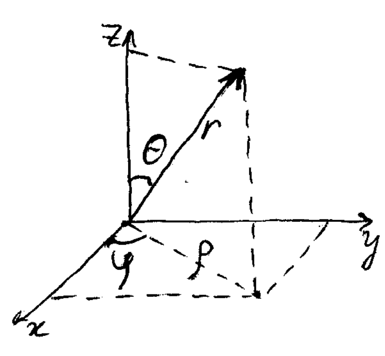


В сферических координатах:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$



$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Двумерный случай: $x=\rho\cos\varphi$
(или цилиндрич.) $y=\rho\sin\varphi$
$z=z$ (двумерн. если $z=const$)

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}$$

Если ф-ция имеет сферическую симметрию, то

$$\left\{\frac{1}{r^2}\right\}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow u_1=\frac{c_1}{r}+c_2,\ u=\frac{1}{R},$$ где R - радиус-вектор

Решение $u=\frac{1}{R}$ назывант фундаментальным.

В цилиндрич. координатах:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0 \Rightarrow \boxed{u=\ln\rho}$$ фундамент. решение.

$$u=c_1\ln\rho+c_2$$

Т.о. в пространстве на бесконечности решения стремится к 0, а на плоскости оно неограничено.

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\qquad \begin{matrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\end{matrix} \Rightarrow \Delta u=0,\ \Delta v=0$$

Если ф-ция аналитична, то ее действительная и мнимая части удовлетв. ур-нию Лапласа.

$$\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R),\quad \vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

Ф-ла Остроградского: $$\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\,d\tau=\iint\limits_{\Sigma}A_n\,d\sigma$$

Σ - граница Ω

$$\operatorname{div}\vec{A}\equiv\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$A_n=(\vec{A},\vec{n})=\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma$$

проекция $\vec{A}$ на нормаль к поверхности

$$\operatorname{grad} g(x,y,z)\equiv\left\{\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right\}\equiv\nabla g$$

Формула Остроградского говорит о том, что объемный интеграл может быть выражен через поверхностный.

Возьмем $P \equiv u\frac{\partial v}{\partial x}$; $Q \equiv u\frac{\partial v}{\partial y}$; $R \equiv u\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\iiint_\Omega (u\Delta v + \nabla u \nabla v)d\tau = \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}d\sigma$$

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{e}} = \nabla v \cdot \vec{e}$$

(1) $$\iiint_\Omega u\Delta v\, d\tau = \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \iiint_\Omega \nabla u \nabla v\, d\tau$$ – 1-ая формула Грина

$$\iiint_\Omega v\Delta u\, d\tau = \iint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - \iiint_\Omega \nabla u \nabla v\, d\tau$$ – (2-я формула Грина)

(2) $$\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)d\tau = \iint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$ – 2-я формула Грина.

Вывод 3-ей (основной) формулы Грина.

Точка M_0, R_{M_0P} – расстояние M_0P.

$$u \equiv \frac{1}{R_{M_0P}}$$

Основная сложность возникает, если M_0 в Ω или на Γ.

6.05.2004г. Лекция № 12.

3-я (основная) формула Грина:

(3) $$T\cdot v(M_0) = \iint_\Sigma \left[\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial v}{\partial n_p}(P) - v(P)\frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right]d\sigma_p - \iiint_\Omega \frac{\Delta v(P)}{R_{M_0P}}d\tau_p,$$

где
$$T = \begin{cases} 4\pi, & M_0 \in \Omega \\ 2\pi, & M_0 \in \Sigma \\ 0, & M_0 \notin \bar{\Omega} \end{cases}, \quad \bar{\Omega} = \Omega + \Sigma$$

P т.н. текущая точка интегрирования.

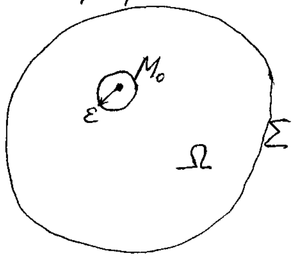
n_p – нормаль, взятая в этой точке.

Подставим во 2-ю формулу Грина вместо u $\frac{1}{R_{M_0P}}$, т.е. $u \equiv \frac{1}{R_{M_0P}}$

Если $M_0 \notin \bar{\Omega}$, то $\Delta u \equiv 0$

1. Рассмотрим первый случай: $M_0 \in \Omega$.

Тогда формально подставить её в левую часть нельзя.



Возьмем шар с центром в точке M_0 радиусом ε.

Обозначим его $K_\varepsilon(M_0) \equiv K$.

Вместо области Ω будем рассматривать область $\Omega_\varepsilon = \Omega / \bar{K}$, $\bar{K}$ - шар со сферой (т.е. границей).

$\Sigma_\varepsilon = \tilde{K}$ - граница шара K.

Тогда граница Ω_ε это $\Sigma + \tilde{K}$

Применим к области Ω_ε 2-ю формулу Грина.

$$\left(\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_p}(P) \right] d\tau_p = \iint\limits_{\Sigma} \right)$$

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \Delta v(P) \right] d\tau_p = \iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n}(P) - v \frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma_p$$

При $\varepsilon \to 0$ левая часть стремится к интегралу по Ω в смысле несобственного интеграла.

Интеграл по Σ от ε не зависит.

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_p}(P) - v(P) \frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma_p$$

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_p}(P)\, d\sigma_\varepsilon \equiv \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_p}(P)\, d\sigma_p = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial v}{\partial n}(Q) \cdot 4\pi\varepsilon^2 \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

(по теореме о среднем; здесь $Q \in \Sigma_\varepsilon$). (т.к. $\frac{\partial v}{\partial n}$ ограничена) (она непрерывна)

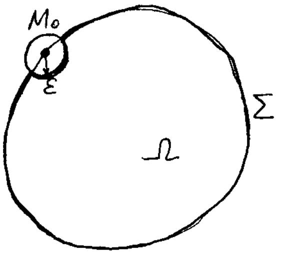
$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} v \frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) d\sigma_p = \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} v \left[-\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{R=\varepsilon} \right] d\sigma_p = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} v(P)\, d\sigma_p = \frac{1}{\varepsilon^2} v(Q) 4\pi\varepsilon^2 =$$
$$4\pi v(Q) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 4\pi v(M_0)$$

В ф-ле Остроградского производная по внешней нормали. В нашем случае эти нормали направлены по радиусам к центру шара K.

Т.о. $$\iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_p}(P) - v(P) \frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma_p - \iiint\limits_{\Omega} \frac{\Delta v(P)}{R_{M_0P}} d\tau_p = 4\pi v(M_0),$$

где $M_0 \in \Omega$

2. Случай, когда $M_0 \in \Sigma$.



Пусть K – шар с ц. M_0 $r = \varepsilon$ – поступаем аналогично предыдущему случаю.

Подставляем во вторую ф-лу Грина.

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \Delta v(P)\right] d\tau_P = \iint\limits_{\Sigma/\Sigma_\varepsilon} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] d\sigma_P +$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_P}(P) - v \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] d\sigma_P$$

Левая часть и первый интеграл правой – аналогично случаю 1.

При $\varepsilon \to 0$, та часть $\tilde{K}$, что оказывается внутри, равна половине сферы (если поверхность гладкая, а она будет гладкой при $\varepsilon \to 0$).

Тогда $\iint\limits_{\Sigma/\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_P}(P) d\sigma_P \to 0$, $\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} v \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) d\sigma_P \to 2\pi v(M_0)$

Т.о. $\iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_P}(P) - v(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] d\sigma_P - \iiint\limits_{\Omega} \frac{\Delta v(P)}{R_{M_0P}} d\tau_P = 2\pi v(M_0)$,

где $M_0 \in \Sigma$

3. Случай 3 доказывается прямой подстановкой – если $M_0 \notin \bar{\Omega}$, то нигде никаких особенностей нет.

Следствия формул Грина.

1. Рассмотрим первую ф-лу Грина.

В (1) возьмем $u \equiv 1$, а v – гармоническая (т.е. $\Delta v \equiv 0$).

Тогда $\Delta v = 0$, $\nabla u = 0$ и $\boxed{\iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0}$

Помимо ур-ния Лапласа рассматривают две краевых задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_\Gamma = \varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = f \end{cases}$$

Вторая задача имеет решение т. и т.т., когда $\iint\limits_{\Sigma} f(P) d\sigma_P = 0$

(это видно из первого следствия.

2. Пусть v – гармоническая в Ω, т. $M_0 \in \Omega$, Ω – ~~сфе~~ шар $(M_0; R)$

Тогда 3-я ф-ла выглядит следующим образом:

$$\Delta v = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial v}{\partial n_p}(P)\, d\sigma_p = \frac{1}{R} \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = 0 \text{ (из 1 следствия)}$$

$R_{M_0P} = R = const$ на Σ, т.к. Ω шар $(M_0; R)$

$$4\pi v(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma} v(P) \frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) d\sigma_p = -\iint\limits_{\Sigma} v(P)\left(-\frac{1}{r^2}\right)\Bigg|_{r=R} d\sigma_p =$$

$$= \frac{1}{R^2} \iint\limits_{\Sigma} v(P)\, d\sigma_p$$

Т.о. если $\Delta v = 0$, Ω шар $(M_0; R)$, тогда

$$\boxed{v(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Sigma} v\, d\sigma}$$

По-другому следствие 2 называется <u>теорема о среднем значении гармонической функции</u>.

3. <u>Принцип максимального значения</u>.

Пусть v – гармоническая в Ω, тогда своих наибольшего и наименьшего значений она достигает на границе.

Доказательство от противного.

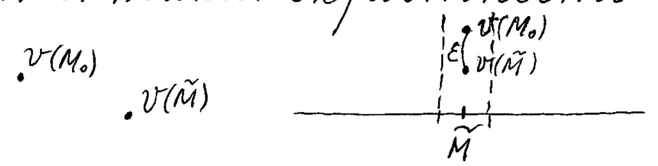
Пусть $\forall M: v(M_0) \geq v(M)$, $M_0 \in \Omega$ $\quad (v \neq const)$

Опишем сферу $(M_0; R)$, так, что она лежит в Ω.

Тогда по теореме о среднем $\quad v(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Sigma} v\, d\sigma$

Предположим, что при некотором R $\; v(\tilde{M}) < v(M_0)$, где $\tilde{M} \in$ сфере (это верно, т.к. $v \neq const$).

v – гармоническая, а значит, непрерывная, а тогда найдется такая окрестность $\tilde{M}$ δ, что



$$|v(\tilde{M}_0) - v(M)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Sigma} v(P)\, d\sigma_p = \frac{1}{4\pi R^2}\Bigg[\underbrace{\iint\limits_{\Sigma/\delta(\tilde{M})} v(P)\, d\sigma_p}_{<\text{заменим } v \text{ на max, т.е. } v(M_0)} + \iint\limits_{\delta(\tilde{M})} v(P)\, d\sigma_p\Bigg] < v(M_0)\frac{4\pi R^2 - \tilde{S}}{4\pi R^2} + \frac{\tilde{S}}{4\pi R^2}\left(v(M_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$< v(M_0) \cdot S_{\Sigma/\delta(\tilde{M})}$, а $S_{\Sigma/\delta(\tilde{M})} < 4\pi R^2$

$= v(M_0) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\tilde{S}}{4\pi R^2}$

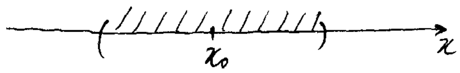
Т.о. имеем противоречие: $v(M_0) < v(M_0) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\tilde{S}}{4\pi R^2}$. Доказано

Из принципа максимума получаются следствия, аналогичные параболическому случаю.

Формула Тейлора.

$f(x)$. в некот. окр. x_0 $f(x)$ имеет $(n+1)$ ограниченную производную.

$\exists f^{(k)}(x)$, $k = \overline{1, n+1}$
$\forall x \in \delta(x_0)$



Тогда ф-цию можно разложить по ф-ле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

$R_{n+1}(x) \equiv \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $x_0 < \xi < x$ $\quad |R_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$,

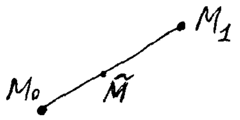
т.е. ошибка весьма мала.

Частной случай $x_0 \equiv 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Эту формулу называют формулой Маклорена.

Формула Тейлора верна и для многомерного случая.



$(\tilde{M} \equiv)$ $\quad \vec{M}_0 + t(\vec{M}_1 - \vec{M}_0)$ - обычная запись прямой.

$\vec{M}_0 = \vec{M}(0)$

$0 \leq t \leq 1$

$\vec{M}_1 \equiv \vec{M}(1)$

На этом отрезке $f(M) \equiv f(M(t)) \equiv F(t)$

$f(M_0) \equiv F(0)$

$f(M_1) \equiv F(1)$

$f(M_1) \equiv F(1) = F(0) + F'(0)\cancel{t} + \ldots$

$$f(M) \equiv F(t) = F(0) + F'(0)\cdot t + \ldots$$

Т.о. $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_{n+1}(x)$$

Приращение: $$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(\Delta x)^i + R_{n+1}(x)$$