$$\frac{dy_1}{\psi\cdot f_1(x, y_1,\dots,y_n)}=\frac{dy_2}{\psi\cdot f_2(x, y_1,\dots,y_n)}=\dots=\frac{dy_n}{\psi\cdot f_n(x, y_1,\dots,y_n)}=\frac{dx}{\psi}$$

$$y_1\equiv x_1$$
$$y_2\equiv x_2$$
$$\dots\dots$$
$$y_n\equiv x_n$$
$$x\equiv x_{n+1}$$

$$\psi\cdot f_1\equiv X_1(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$$
$$\psi\cdot f_2 = X_2(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi\cdot f_n = X_n(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \qquad \psi = X_{n+1}(\dots)$$

$$\boxed{\frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,\dots,x_{n+1})}=\dots=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})}}$$

В этой системе уже не имеет значения, что считать независимой переменной.

Это называется системой дифференциальных уравнений в симметричной форме.

Напр., пусть это x_2 - незав. пер.:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dx_2}=\dfrac{X_1}{X_2}\equiv f_1(x_2,x_1,\dots,x_{n+1})\\[2mm] \dfrac{dx_3}{dx_2}=\dfrac{X_3}{X_2}\equiv f_3(\dots)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dx_{n+1}}{dx_2}=\dfrac{X_{n+1}}{X_2}\equiv f_{n+1}(\dots)\end{cases}$$

<u>Пример 1</u>: $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{dz}{-xy}$

// Говорят, что система ПИ независимая, если //

$$\begin{cases}y_1'(x)=f_1(x,y_1,\dots,y_n)\\ \dots\dots\dots\dots\\ y_n'(x)=f_n(x,y_1,\dots,y_n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_1(x, y_1,\dots,y_n)=C_1\\ \dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(x,y_1,\dots,y_n)=C_n\end{cases}$$

Якобиан:

$$J(x,y_1,\dots,y_n) \equiv \frac{D[\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n]}{D(x,y_1,\dots,y_n)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Говорят, что система ПИ независимая, если в якобиане найдется минор порядка n, определитель которого не равен 0.

Теорема: Если имеется система ~~независимых~~ интегралов и минор k-того порядка якобиана не равен 0, то из системы можно выразить k из них через остальные (те k, что входят в указанный минор).

Например: $F(x,y)=0$

$$J(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \;\; \frac{\partial F}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow y = \psi(x)$$

Кроме того, $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz};$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y};$$

$$d(\ln x) = d(\ln y);$$

$$d(\ln x - \ln y) = 0;$$

$$d\left(\ln \frac{y}{x}\right) = 0;$$

$$\ln\frac{y}{x} = C.$$

ПИ: $\boxed{\ln\frac{y}{x} = C_1}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = C_1}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_s}{b_s} = t$$

$\forall (k_1 k_2 \dots k_s)$:

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_s b_s} = t$$

$$\frac{k_1(a_1 - tb_1) + k_2(a_2 - tb_2) + \dots + k_s(a_s - tb_s)}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_s b_s} = 0 \quad (\text{т.к. } a_i = t$$

Т.о. $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} \Rightarrow \dfrac{y\,dx + x\,dy}{2xyz} = \dfrac{dz}{-xy}$;

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{2z} = \frac{dz}{-1}$$

$$d(xy) = -d(z^2)$$

$\boxed{z^2 + xy = C_2}$ ПИ

ПИ: $\frac{y}{x} = C_1$ и $z^2 + xy = C_2$.

Отсюда: $y = C_1 x$

$z = \pm\sqrt{C_2 - C_1 x}$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ y & x & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ x & 2z \end{vmatrix} = \frac{2z}{x} \neq 0 \ (z \neq 0)$$

Можно было поступить следующим образом:

$y = C_1 x;$

$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-xy};$

$-\cancel{x} y\,dx = z\,dz;$

$-C_1 x\,dx = z\,dz;$

$d(-C_1 x^2) = d(z^2);$

$z^2 + C_1 x^2 = C_2;$

$z^2 + \frac{y}{x} \cdot x^2 = C_2;$

$\boxed{z^2 + xy = C_2}.$

Пример 2: $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$

$$\frac{dx - dy}{y - x} = -\frac{d(y-x)}{y-x} = -\frac{d(y-z)}{y-z}$$

$$\boxed{\frac{y-x}{y-z} = C_1}$$

$$\frac{dy - dz}{z - y} = -\frac{d(y-z)}{y-z} = -\frac{d(x-z)}{x-z}$$

$$\boxed{\frac{y-z}{x-z} = C_2}$$

1.04.2004г. Лекция №7.

Нормальная система в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,\dots,x_n)}=\lambda\Rightarrow dx_i=\lambda X_i(\dots)$$

Система состоить из (n-1) диф. уравнений.

Соответственно, можно найти (n-1) первых интегралов:

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=c_1\\ \varphi_2(x_1,\dots,x_n)=c_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ \varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=c_{n-1}\end{cases}$$

Эти первые интегралы независимы, т.е. в соответствующем якобиане найдется минор $(n-1)\times(n-1)$ с определителем, не равным 0.

Необходимое и достаточное условие, чтобы φ была первым интегралом, в случае системы в симметричном виде:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=c$$

$$d\varphi(x_1(x_3),\dots,x_n(x_3))=0$$

$$d\varphi(x_1(x_3),\dots,x_n(x_3))\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\lambda X_i\equiv\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

Т.о. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}X_i(\vec{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0}$$

Уравнения в частных производных 1-го порядка.

Линейное однородное ДУ в ЧП 1-го порядка.

$$X[u]\equiv\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$, где $X_i(\vec{x})$ – известные функции.

$u\equiv u(x_1,\dots,x_n)\equiv u(\vec{x})$

Оператор $X[u]$ линеен как относительно функции $u(\vec{x})$, так и ее производных.

Уравнение:

$$X[u]\equiv\sum_{i=1}^{n}X_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\qquad(1)$$

Можно тогда составить систему:

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})}=\frac{dx_2}{X_2(\vec{x})}=\dots=\frac{dx_n}{X_n(\vec{x})}\qquad(2)$$

Предположим, мы нашли $(n-1)$ первых интегралов этой системы:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{cases} \quad (3) \quad (n-1) \text{ независимых ПИ}$$

Каждый из этих первых интегралов будет решением исходного уравнения, т.к.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv 0 \qquad (4)$$

Т.о., нам известно, что у уравнения (1) всегда есть $(n-1)$ решение.

<u>Теорема 1</u>: Любой первый интеграл системы (2) есть решение уравнения (1). (если у есть ЧП).

Доказано.

<u>Теорема 2</u>: Пусть $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ имеет непрерывные частные производные, т.е.

$\forall k = \overline{1, n-1} \ \exists \ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}$ – непрерывная

Тогда функция $u(\vec{x}) \equiv \Phi(\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\vec{x}))$ есть решение уравнения (1).

<u>Доказательство</u>:

Подставим $u(\vec{x})$ в уравнение (1)

$// X[u] \equiv X[\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})] \equiv //$

$$X[u] = X[\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})] \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x}) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} X[\varphi_j] \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \cdot 0 = 0$$

(суммы можно менять местами, т.к. они конечны)

$X[\varphi_j] = 0$ (т.к. φ_j решения), т.о

$X[\Phi] = 0$, т.о. Φ – решение.

Доказано.

<u>Теорема 3</u>: Пусть $\tilde{u}(\vec{x})$ – решение уравнения (1).

Тогда существует такая функция $\tilde{\Phi}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ (имеющая ЧП), что

$\tilde{u}(\vec{x}) \equiv \tilde{\Phi}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, причем $\tilde{\Phi}$ – единственна.

Доказательство:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \equiv 0 \text{ (это нам дано)} \\ \text{По теореме 1 можно записать:} \\ X_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \equiv 0 \text{ (т.к. ПИ } \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1} \text{ - тоже решения)} \end{cases}$$

Т.о. имеем n тождеств. Это можно рассматривать как линейную систему с n „как бы" неизвестными (ведь X_i на самом деле известны).

Очевидно (это задано), не все X_i равны 0.

Значит, система допускает ненулевое решение. Тогда она обязана иметь нулевой определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

в теории неявных функций:

Т1: Если есть n каких-то функций (у них есть ЧП), якобиан которых в какой-то области переменных равен нулю, то из этого следует, что

$\exists!\ \tilde{F}(\tilde{u}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \equiv 0$, т.е. между ними имеется функциональная зависимость.

Т2: Если это известно и если в якобиане этой ф-ции найдется минор порядка $(n-1)$, не равной нулю, тогда

$\exists!\ \tilde{\Phi}:\ \tilde{u} \equiv \tilde{\Phi}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ (в общ. сл. ф-ции, не вошедшая в минор.

Условие этой теоремы выполнены: якобиан равен 0, значит $\exists!\ \tilde{F}(\tilde{u}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, а значит, по теореме 2, $\tilde{u} \equiv \tilde{\Phi}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$

Т.к. (3) – независимые интегралы, то, вычеркнув в якобиане первую строчку, мы получим их якобиан, а в нем искомый минор найдется (по определению независимости ПИ).

Доказано.

Квазилинейные уравнения.

$$\tilde{X}[u] \equiv \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i(\vec{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = R(\vec{x}, u) \qquad (\tilde{1})$$

Пусть имеется неявная функция:

$V(u, \vec{x}) = 0$

$\exists \frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$; они непрерывны;

$\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$

Тогда $\exists f: u = f(\vec{x})$ и $\exists \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}}$

Это теорема теории неявных функций.

Попробуем в случае уравнения $(\tilde{1})$ искать функцию:

$V(u, \vec{x}) = 0$, где u - решение $(\tilde{1})$

Предположим, нашлась такая функция.

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial V / \partial x_i}{\partial V / \partial u}$

Подставим:

$$X[V] \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i(u, \vec{x}) \frac{\partial V}{\partial x_i} + R(u, \vec{x}) \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \qquad (\tilde{\tilde{1}})$$

$u \to V$

$(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n, u)$

Это уравнение - полный аналог (1).

$$\frac{dx_1}{X_1(u, \vec{x})} = \frac{dx_2}{X_2(u, \vec{x})} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(u, \vec{x})} = \frac{du}{\cancel{X_{n+1}}R(u, \vec{x})}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_n \end{cases}$$

Тогда $V[\varphi_1(\vec{x}, u), \dots, \varphi_n(\vec{x}, u)] = 0$

Из этого уравнения можно найти u как $u(\vec{x})$.

Задача Коши.
(для уравнения (1)).

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \qquad (1^*)$$

Найти решение - такую функцию, которая удовлетворяет и (1), и (1*)

Возьмем первые интегралы:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

При этом фиксируется x_k, где k - номер столбца, вычеркиваемого из Якобиана для получения ненулевого минора.

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \eta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \eta_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

(x_n^0, т.к. всегда можно переобозначить x).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \omega_1(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \end{cases}$$

(разумеется, x_i зависят еще и от x_n^0).

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi\left[\omega_1(\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\vec{x})), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\vec{x}))\right]$$

Т.е. это решение задачи Коши для уравнения (1).

Доказано.

8.04.2004г.

Лекция №8.

Решение задач.

№1 $$xz\frac{\partial z}{\partial y} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$

Найти $z \equiv z(x, y)$

$$y = x^2,\ z = x^3$$

Решение:

Линию, заданную в пространстве, удобно записать в параметрической форме.

Тривиальный способ:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ z = x^3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{array}$$

$$V(x, y, z) = 0$$

Симметричная система:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y};$$

$$d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = 0;$$

$$\frac{y}{x} = c_1$$

Умножим все на xy:

$$\frac{y\,dx}{z} = \frac{x\,dy}{z} = -dz$$

На z: $y\,dx = x\,dy = -z\,dz$

$$y\,dx + x\,dy = -2z\,dz$$

$$d(xy) = -d(z^2)$$

Т.о. $z^2 + xy = c_2$

Первые интегралы:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = c_1 \\ z^2 + xy = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^2}{t} = c_1, \quad t = c_1 \\ t^6 + t^3 = c_2 \end{cases}$$

Имеем соотношение на заданной кривой:

$$\begin{cases} t = c_1 \\ t^6 + t^3 = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = c_1 \\ \Phi_2(t) = c_2 \end{cases} \Rightarrow \psi(c_1, c_2) = 0$$

ψ и будет искомой ф-цией V.

$$V(x, y, z) \equiv \psi(c_1, c_2) \equiv \psi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z))$$

$$\begin{cases} t = c_1 \\ t^6 + t^3 = c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1^6 + c_1^3 = c_2 \Rightarrow c_1^6 + c_1^3 - c_2 = 0$$

Т.о. $\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy$

$z = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - xy}$ (выбираем $+\sqrt{\ }$, хотя $-\sqrt{\ }$ тоже решение, т.е. определяет всё ту же единств. пов-сть, проходящую через заданную кривую).

Ответ: $\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy$.

№2 $\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy \\ x = 2 \\ y = x^2+1 \end{cases}$

Решение:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy};$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y};$$

$$\frac{y}{x} = c_1 \Rightarrow y = c_1 x;$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - c_1 x^2};$$

$$\frac{dz}{dx} \equiv z' = \frac{z - c_1 x^2}{x} = \frac{1}{x} z - c_1 x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad z = Dx;$$

$$z = D(x)\cdot x, \quad z' = D'(x)\cdot x + D(x);$$

$$D'(x)x + D(x) - D(x) + c_1 x = 0;$$

$$D'(x) = -c_1 \cancel{x};$$

$$D(x) = -c_1 x + \lambda;$$

Т.о. $z = (-c_1 x + \lambda)x \Rightarrow \dfrac{z + yx}{x} = c_2;$

Имеем: $\begin{cases} \dfrac{y}{x} = c_1 \\ \dfrac{z}{x} + y = c_2 \end{cases}$

Запишем кривую в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = y^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = t^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t}{2} = c_1 \Rightarrow t = 2c_1 \\ \dfrac{t^2+1}{2} + t = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2c_1)^2+1}{2} + 2c_1 = c_2;$$

$$\frac{4c_1^2+1}{2} + 2c_1 = c_2;$$

$$2c_1^2 + 2c_1 + \frac{1}{2} = c_2;$$

$$4c_1^2 + 4c_1 + 1 = 2c_2;$$

$$(2c_1+1)^2 = 2c_2;$$

$$\left(\frac{2y}{x}+1\right)^2=\frac{2z}{x}+2y;$$

Или в виде $z\equiv z(x,y)$:

$$z=\frac{1}{2}x\left(\left(\frac{2y}{x}+1\right)^2-2y\right)$$

Ответ: $z=\frac{1}{2}x\left(\left(\frac{2y}{x}+1\right)^2-2y\right)$.

$$X[u]\equiv\sum_{i=1}^{n}X_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

$$\begin{cases}\varphi_1(\vec{x})=c_1\\ \dots\dots\dots\\ \varphi_{n-1}(\vec{x})=c_{n-1}\end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})}=\frac{dx_2}{X_2(\vec{x})}=\dots=\frac{dx_n}{X_n(\vec{x})}=\lambda$$

Т.н. общий интеграл можно рассматривать как задание некоторой кривой в n-мерном пространстве.

Эта кривая называется характеристикой.

Каждая ее точка удовлетворяет всем $n-1$ первым интегралам.

Рассмотрим поведение $u(\vec{x})$ вдоль характеристики.

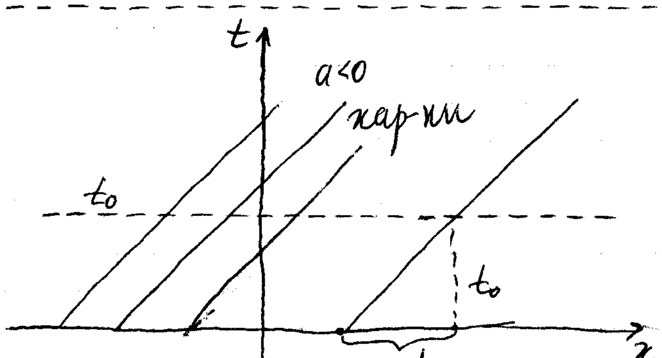
<u>Теорема:</u> вдоль характеристики $u(\vec{x})$ сохраняет постоянное значение.

<u>Доказательство:</u>

$$du=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}X_i(\vec{x})\cdot\lambda=\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

(т.к. мы берем x_i, удовл. соотношениям) (т.к. $u(\vec{x})$ – решение)

Доказано.



$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ t>0.$$

$$u(t=0,x)=\varphi(x)$$

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{-a}$$

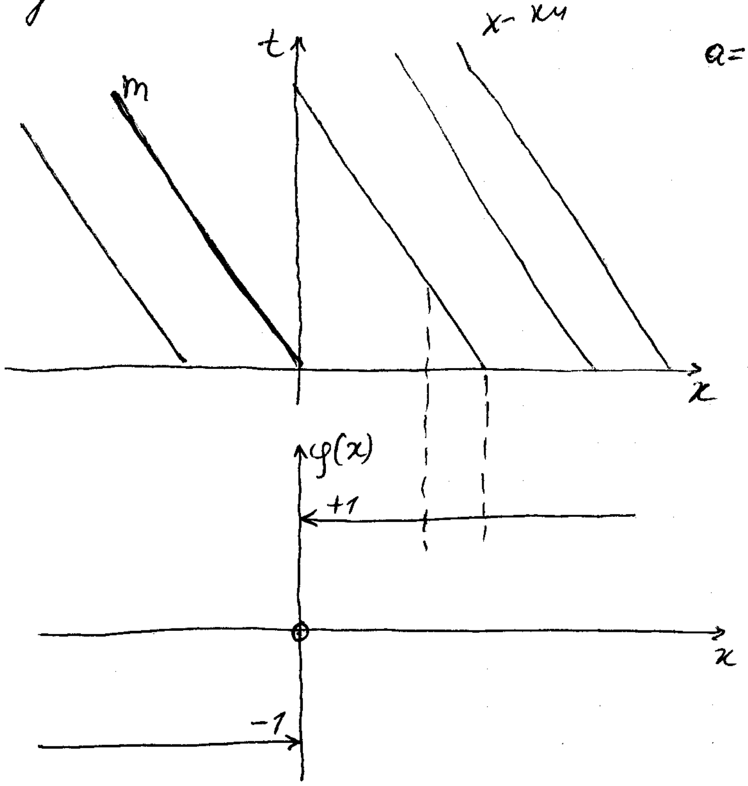
$x+at=c$ первый интеграл.

$$u(t,x)=\varphi(x+at)$$

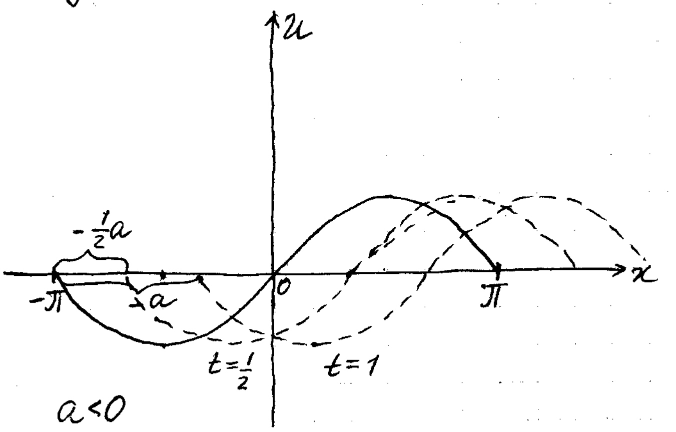
$$u(t_0,x)=\varphi(x+at_0)$$

Т.о. решение можно интерпретировать разными способами

Решение есть некий монолит — оно сохраняется, лишь сдвигаясь.



Вид u в этом случае: полуплоскости ± 1, разделенные m.



Сдвиг решения при разных t. (в сечениях t)

Рассмотрим другой случай: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(t=0, x) = \varphi(x) \end{cases}$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -u$$

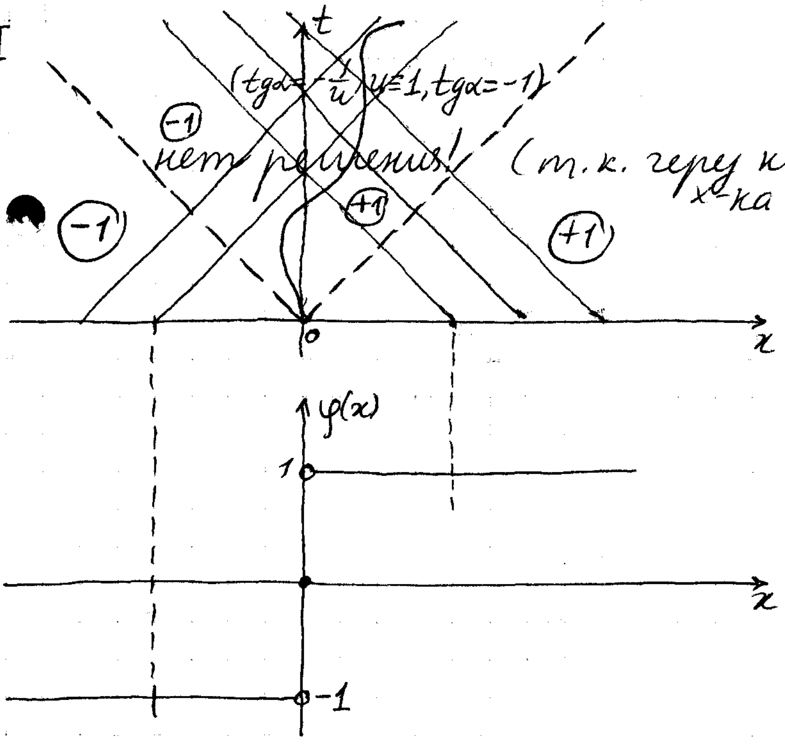
$-u\,dt = dx$, вдоль х-ки $u = const \Rightarrow$

$x + ut = C \quad \left[t = -\frac{1}{u}x + \frac{C}{u}\right]$

$u(t, x) = \varphi(x + ut)$

Интерпретация решения:

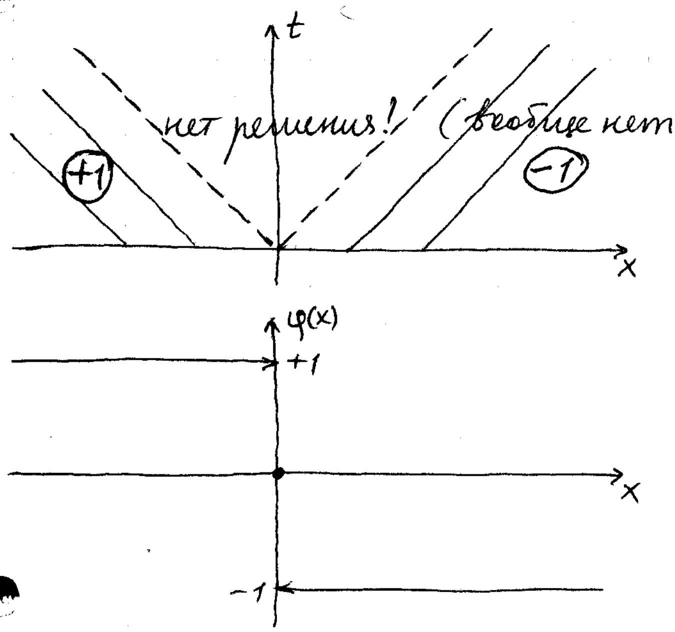
I



(т.к. через каждую точку проходит х-ка +1 и −1.)

Аналогично:

II



(вообще нет характеристик)

Это говорит о некоторой некорректности постановки задачи.

Можно ли через $t=0$ провести кривую так, чтобы слева всегда было -1, а справа $+1$.?

Это приводит к т.н. обобщенным решениям.

Случаи I и II отражают ситуацию с волной/ ударной волной и волной разрежения.

Пусть u удовл. ур-нию и частн. произв. непрерывны. Возьмем любую область Ω (с гладкими границами) в полуплоскости $t>0$, проинт. ур-ние по ней:

$$0 = \iint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2}{2}\right]}\right] dt\,dx = \underbrace{\oint}_{\text{(по ф-ле Грина)}} = \iint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{u^2}{2}\right]\right] dt\,dx \underset{\text{по ф-ле Грина}}{=}$$

$$= \oint\limits_{\gamma} -\frac{u^2}{2}dt - u\,dx = -\oint\limits_{\gamma} \frac{u^2}{2}dt + u\,dx = 0 \quad (\gamma - \text{контур } \Omega)$$

Т.о. $$\oint\limits_{\gamma} \frac{u^2}{2}dt + u\,dx = 0$$

Если интеграл от непрерывной ф-ции по любой области равен 0, то подынтегр. ~~ф~~ выражение 0.

Т.о. ур-ния $\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{u^2}{2}dt + u\,dx = 0$$ эквивалентны, что и было показано.

Если же u не имеет частных производных, разрывна, то ур-ние $\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ уже не существует, но ур-ние $\oint\limits_{\gamma} \frac{u^2}{2}dt + u\,dx = 0$ продолж. существовать.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - v\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \equiv 0$$

Замена: $x \equiv -\xi$ (соотв. $-x \equiv \xi$)

$$\frac{\partial u(t,-\xi)}{\partial t} + u(t,-\xi)\frac{\partial u(t,-\xi)}{\partial(+\xi)} \equiv 0,$$ т.е.

$$\frac{\partial u(t,-\xi)}{\partial t} + u(t,-\xi)\frac{\partial u(t,-\xi)}{\partial \xi} \equiv 0 \quad \Big|\times(-1) \quad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[-u(t,-\xi)] - [-u(t,-\xi)]\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}[-u(t,-\xi)] \equiv 0$$

Т.о. ф-ция $\boxed{-u(t,-\xi)}$ удовлетв. уравнению (*) и условию $-u(0,-\xi) = -\varphi(-\xi)$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v(0,x) = \varphi(x) \end{array}\right]$$

Решением этой задачи является $u(t,x)$ (это дано).

$$\frac{\partial}{\partial t}[-u(t,-x)] - [-u(t,-x)]\frac{\partial}{\partial x}[-u(t,-x)] = 0$$

Функция $-u(t,-x)$ тоже удовлетворяет уравнению.

Также она удовлетворяет и условию, т.к. $\varphi(-x) \equiv -\varphi(x)$.

В силу единственности решения отсюда следует, что $u(t,x) \equiv -u(t,-x)$

Т.е. если начальное условие есть нечетная функция, то и решение – ф-ция нечетная.

Если начальная функция периодическая:

$\forall x: \ \varphi(x+T) \equiv \varphi(x)$

Рассмотрим периодическую функцию:

$u(x+T)$. Она, очевидно, удовлетворяет и уравнению, и условию.

Т.е. если ~~начальную~~ начальная ф-ция периодическая, то и решение – периодическая функция.

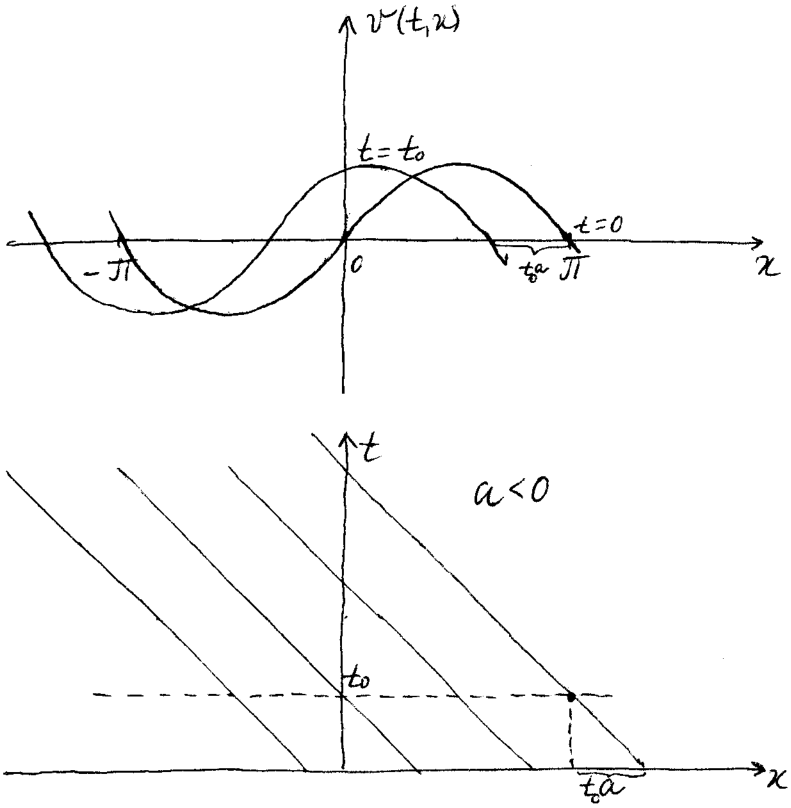
Например, в случае синуса, благодаря этим св-вам, достаточно рассматривать отрезок $[0; \pi]$

Пусть имеется задача:

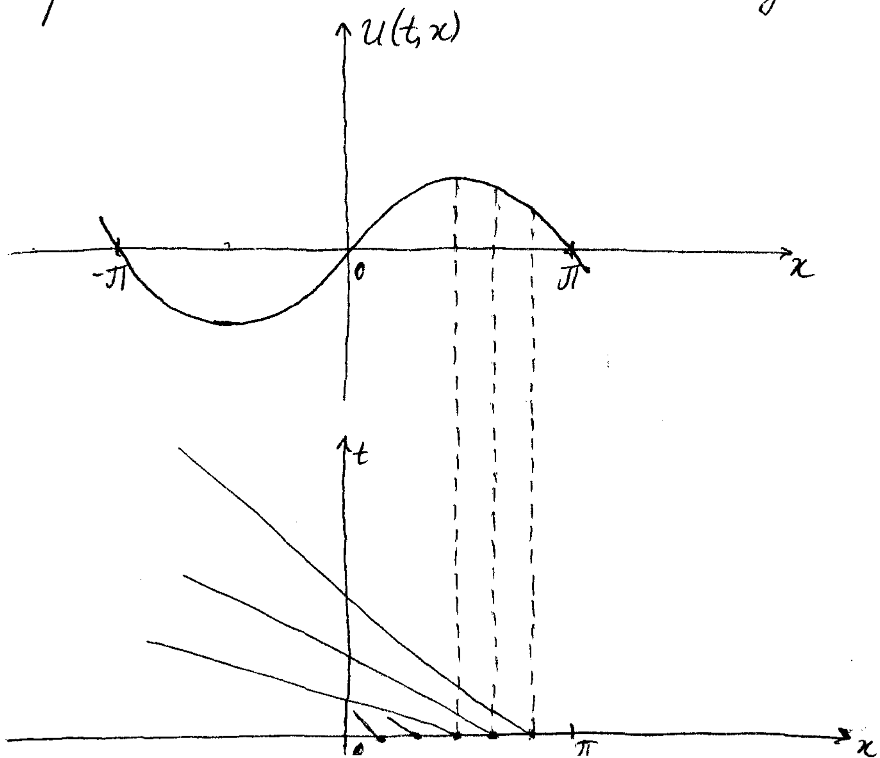
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v(t, x) \equiv \varphi(x) \equiv \sin x \end{cases}$$

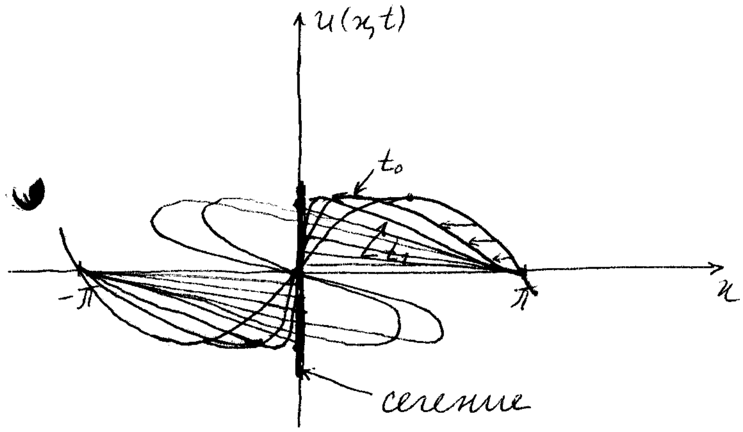
$$x + at = c \qquad \frac{dx}{dt} = -a$$

$$v(t,x) = \sin(x+at)$$



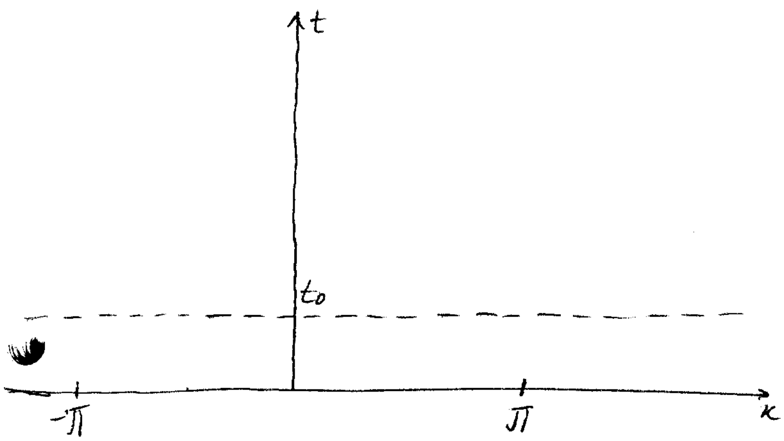
Простейший нелинейный случай: $\dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$





Точка на гребне „бежит" к вертикальной оси.

Можно провести сечение через 0, тогда картина будет следующей (в физике это т.н. аннигиляция энергии).



$u = \varphi(x+ut)$

$u'_x = \varphi_\xi(1 + t\cdot \cancel{u} u'_x)$

$u'_x = \varphi_\xi(1 + t\cdot u'_x)$

$u'_x = \dfrac{\varphi_\xi}{1 - t\varphi_\xi}$

Т.о. при $t_0 = \dfrac{1}{\varphi_\xi}$ возникнет разрыв.

При больших t возникнет ситуация, когда решение неоднозначно.

Разрыв говорит о возникновении ударной волны.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Проинтегрируем в некотором сечении t:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)\,dx = \frac{u^2}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

(это требов. используется в физике — на бесконечности зн-ния должны совпадать).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)\,dx \equiv S(t)$$ (площадь под кривой).

$$\frac{d}{dt} S(t) \equiv 0$$

$$S(t) = const = S(0)$$

В физике это т.н. закон сохранения количества движени

Уравнения математической физики.

Классификация уравнений матфизики.

Общий вид линейного уравнения 2-го порядка в частны производных:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \equiv F \quad (1)$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \varphi(x,y) \quad (2_1)$$

$$\eta = \psi(x,y) \quad (2_2)$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.$$

Подставлеем в уравнение:

$$\boxed{\bar a_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar a_{12} u_{\xi\eta} + \bar a_{22} u_{\eta\eta} = \bar F} \quad (3)$$

$$\bar a_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \quad (4_1)$$

$$\bar a_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\eta_y\xi_y \quad (4_2)$$

$$\bar a_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \quad (4_3)$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение.

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0 \quad (5)$$

А также уравнение:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (6)$$

<u>Лемма:</u> Для того, чтобы функция $z = \varkappa(x, y)$ была решением уравнения (5), необходимо и достаточно, чтобы выражение:

$\varkappa(x, y) = c$ было первым интегралом уравнения (6)

<u>Доказательство:</u>

I. <u>Необходимость:</u> Дано: $\varkappa(x,y)$ – решение (5)

Надо: $\varkappa(x,y) = c$ – ПИ уравнения (6)

Т.о. дано, что $a_{11}\varkappa_x^2 + 2a_{12}\varkappa_x\varkappa_y + a_{22}\varkappa_y^2 = 0$

Ни одна производная не равна 0 (т.к. если одна 0, то и вторая 0, а тогда $\varkappa \equiv c$)

$$a_{11}\left(\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right) + a_{22} \equiv 0$$

$$a_{11}\left(-\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right) + a_{22} \equiv 0$$

Если из соотнош. $\varkappa(x,y) = c$ выразить $y = X(x,c)$, то это решение (6)

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \quad (6')$$

$$y_x = -\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}$$

Если подставить y_x в (6'), получим $a_{11}\left(-\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right)^2 + \ldots = 0$

Т.о. $\varkappa(x,y) = c$ – первый интеграл (6)

II. <u>Достаточность:</u> Дано: $\varkappa(x,y) = c$ ПИ

Надо: $\varkappa(x,y)$ – решение (5)

Доказательство аналогично (в обратную сторону).

Доказано

Решая квадратное по $\frac{dy}{dx}$ уравнение (6) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Соответственно, возможны три случая, которые и классифицируют исходный тип уравнения.

1) $\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$

В этой области имеется два решения уравнения (6) {(6)

∃ два первых интеграла $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, тогда для замены:

$\varphi(x,y) \equiv \varkappa_1 \quad \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0$

$\psi(x,y) \equiv \varkappa_2 \quad \Rightarrow \bar{a}_{22} = 0$ $\Rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = \tilde{F}}$ это т.н. канонический вид.

Сам тип уравнения называется гиперболическим.

Иногда делают замену:

$$\begin{cases} \xi = \alpha+\beta \\ \eta = \alpha-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\xi+\eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$

Тогда $u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$

$u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$

$u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi} = \left[\frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)\right]'_\eta = \frac{1}{4}\left[u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}\right]$

По-другому гиперболический тип записывают в виде:

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \hat{F}}$$

22.04.2004г.

Лекция №10

$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$

$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}$

1) $D > 0$: гиперб. тип

$u_{\xi\eta} = \tilde{F}; \quad u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \hat{F}$

2) $D = 0$

Тогда будет только один первый интеграл

$\xi \equiv \varphi(x,y) \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0$ (по лемме)

$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$

$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y)$ (т.к. $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, то $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$)

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0 \Rightarrow \bar{a}_{12} = 0$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} = 0 \\ \bar{a}_{12} = 0 \end{cases}$$

Это т.н. параболический тип.

$u_{\eta\eta} = \hat{F}$, $\hat{F} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ - если сюда не входит u_ξ, то это обычное уравнение второго порядка (не в частных производных).

3) $D < 0$

$\varphi(x,y) = c_1$ (при этом они комплексно сопряжены)
$\psi(x,y) = c_2$

$\xi \equiv \varphi(x,y)$
$\eta \equiv \psi(x,y) \equiv \varphi^*(x,y)$

Введём $\alpha = \dfrac{\varphi + \varphi^*}{2} \equiv \dfrac{\xi + \eta}{2}$
$\beta = \dfrac{\varphi - \varphi^*}{2i} \equiv \dfrac{\xi - \eta}{2i}$

α и β - уже действительные переменные.

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) \equiv 0 \Rightarrow$$

$\bar{a}_{11}$ при замене (α, β) переходит в $\tilde{a}_{11}$ и т.п.:

$\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22} + 2i\tilde{a}_{12} \equiv 0;$

$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22};$

$\tilde{a}_{12} = 0.$

Т.о. каноническая форма:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \hat{F}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

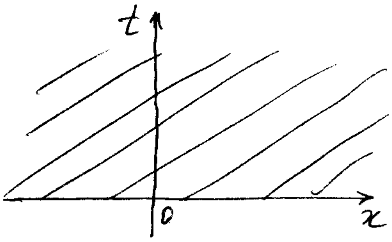
Это т.н. эллиптический тип.

Гиперболическое уравнение.

Запишем в виде:

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$

Подавляющее большинство волнообразных процессов описываются именно таким уравнением.

1) 

Задаем начальные условия:

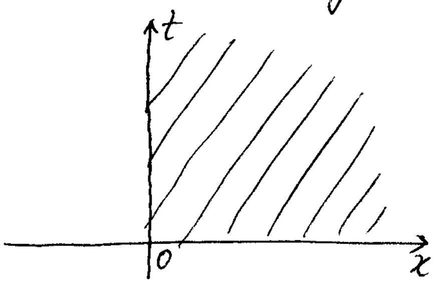
$u(0,x) = \varphi(x)$

$u_t(0,x) = \psi(x)$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

— задача Коши. (решение для $t>0$) (задача на неогранич. прямой)

2) Решение в одной четверти:

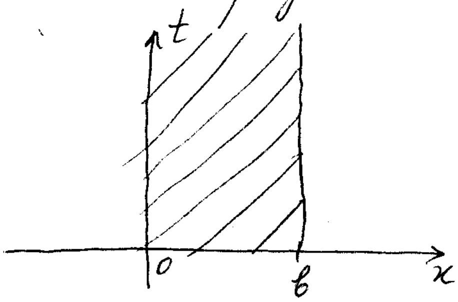


$u(t,0) = \mu_1(t)$

$u_x(t,0) = \mu_2(t)$.

Т.н. задача на полуограниченной прямой.

3) На отрезке:



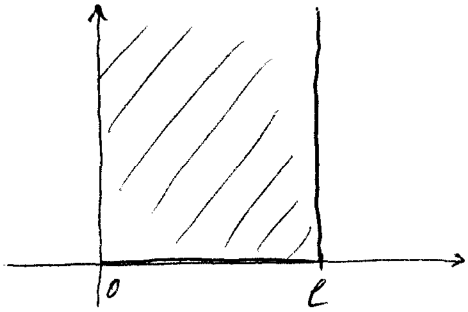
Это т.н. краевая задача.

Именно эти три типа чаще всего встречаются на практике.

Для краевой задачи существует единый способ решения для всех трех типов уравнений — метод Фурье.

<u>Теорема единственности решения краевой задачи для гиперболического типа:</u>

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + F(t,x) \\ u(0,x) = \varphi(x) \in C_2 \ \text{(2 диф. ф-ции)}, \quad \rho(x), k(x) \in C \\ u_t(0,x) = \psi(x) \in C_1 \ \text{(диф. ф-ция)} \quad \text{(все } \in \text{ - условия } \exists \text{ реш.)} \\ u(t,0) = \mu_1(t) \in C \ \text{(непр. ф-ция)} \\ u(t,l) = \mu_2(t) \in C \end{cases}$$



Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ - решения.

Тогда $v(t,x) \equiv u_1 - u_2$ удовл. уравнению

$v|_\Gamma \equiv 0$ (на границе $v \equiv 0$).

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [k(x)v_x^2 + \rho(x)v_t^2]dx$ (физически она играет роль энергии).

Т.к. мы рассматриваем гиперболический тип, то $\rho(x)$ и $k(x)$ одного знака. Пусть $\rho(x), k(x) > 0$.

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [k(x)v_x^2 + \rho(x)v_t^2]dx$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int\limits_0^l [k(x)v_x v_{xt} + \rho(x)v_t v_{tt}]\,dx \ominus$$

$$\int\limits_0^l k(x)v_x v_{xt} = \int\limits_0^l k(x)v_x\,d(v_t) = k(x)v_x v_t\Big|_0^l - \int\limits_0^l v_t(k(x)v_x)_x dx =$$

$$= -\int\limits_0^l v_t(k(x)v_x)_x dx$$

$$\ominus \int\limits_0^l v_t[\rho(x)v_{tt} - (k(x)v_x)_x]\,dx \equiv 0 \Rightarrow E(t) = const \Rightarrow E(0) = const$$

Т.к. v удовл. ур-нию $\rho v_{tt} - (kv_x)_x = 0$

$0 = E(0) = const \Rightarrow \forall t \geq 0 \;\; E(t) \equiv 0$

$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [\rho(x)v_x^2 + k(x)v_t^2]dx \equiv 0, \;\; \rho(x), k(x) > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} v_x \equiv 0 \\ v_t \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow v \equiv const = 0 \;\; (\text{т.к. } v|_\Gamma \equiv 0)$$

Доказано.

Задача Коши. Формула Д'Аламбера.

- Рассмотрим однородное уравнение вида:

$u_{\xi\eta} = 0$.

Неоднородное уравнение, соответственно, имеет вид:

/ $u_{\xi\eta} = \{f(x,y)\}\ f(\xi,\eta)$

$u_\xi = \int f(\xi,\eta)\,d\eta + f_1(\xi)$ /

$u_{\xi\eta} = f(\xi,\eta)$

/ $u_\xi = \int f(\xi,\eta)\,d\eta + g(\xi)$

$u(\xi,\eta) = f_2(\eta) +$ /

$u_{\xi\eta} = 0$

$u_\xi = g_1(\xi)$

$u(\xi,\eta) = \int g(\xi)\,d\xi + f_2(\eta) \equiv f_1(\xi) + f_2(\eta)$

$u_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

В дальнейшем в большинстве случаев будем рассматривать постоянные коэффициенты.

Рассмотрим $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ (гиперб. ур-ние)

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

Первые интегралы: $x \pm at = c \Rightarrow$

$\xi = x + at$

$\eta = x - at$

$u(t,x) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \\ u_t(t=0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

Кладем $t = 0$:

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \end{cases}$$ – переформ. начальные условия.

$$\begin{cases} f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx \\ f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx$$

$$\boxed{u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(x)\,dx}$$

решение задачи Коши.

L – оператор, обознач. линейность и подраз. гиперболич., параболич. или эллиптич. тип.

$$Lu = f$$

$u_н = \varphi$ (нач. усл. – вектор $u(t=0,x)=\varphi$; $u_t(t=0,x)=\psi$)

$u_г = \mu$ (граничн. усл. – тоже вектор)

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 \\ u_{1н} = \varphi \\ u_{1г} = \cancel{\psi}\,0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_2 = 0 \\ u_{2н} = 0 \\ u_{г2} = \mu \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_3 = \cancel{0}\,f \\ u_{3н} = 0 \\ u_{3г} = 0 \end{cases}$$

Принцип суперпозиции:

$$u \equiv u_1 + u_2 + u_3$$

Если задача линейна, то решение можно искать по частям.

Доказательство основывается на единственности.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x) \\ u|_t = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{a}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\alpha)\,d\alpha\,d\tau$$

Вид решения задачи Коши в целом:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x) \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \\ u_t(t=0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(x)\,dx + \frac{a}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\alpha)\,d\tau\,d\alpha$$