Дифференциальные уравнения

12.02.2004г.

Лекция №1

$y' = f(x,y)$

$y(x)$

$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной:

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ – уравнение в неявном виде.

Если задать x_0 и $y(x_0) = y_0$, то выделяется единственное решение уравнения $y' = f(x,y)$

Это т.н. начальное условие.

Начальное условие + уравнение – это задача.

Задача имеет единственное решение.

Для $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ это x_0, $y(x_0) = y_0$

$$y'(x_0) = y_0'$$
$$\dots\dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Пусть заданы $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, тогда

$$\begin{cases} u_1' = f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ u_2' = f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \dots\dots\dots \\ u_n' = f_n(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$ – нормальная система.

В векторном виде:

$\vec{u}(x) = \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$; $\vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{u}'(x) = \vec{f}(x, \vec{u})$$

В случае $n=1$ система совпадает с ДУ 1 порядка.

Любое уравнение n-ного порядка можно записать в виде нормальной системы.

$u_1(x) \equiv y(x)$

$u_2(x) \equiv y'(x)$

$\dots\dots$

$u_{n-1}(x) \equiv y^{(n-2)}(x)$

$u_n(x) \equiv y^{(n-1)}(x)$

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}' = u_n \\ u_n' = f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{cases}$$

Отсюда следует, что достаточно изучать нормальную систему.

Имеет ли задача решение?: $\begin{cases} \vec{u}'(x) = \vec{f}(x, \vec{u}) \\ \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$

Единственно ли это решение?

Пусть имеется задача, записанная в виде:

$u = \varphi(u)$ (1) – так можно записать любую задачу.

Например: $L(u) = 0$

$u = u - L(u)$

$u = \underbrace{u - g(u)L(u)}_{\varphi(u)}$, $g(u) \neq 0$

$u = \varphi(u)$

<u>Теорема</u>: Пусть выполнены условия:

1) $u \in U$, U – полное метрическое пространство

2) φ – это такое преобразование, что оно переводит U в U, т.е. $\varphi: U \to U$

3) φ – сжимающее отображение, т.е. $\exists q < 1: \forall u_1, u_2 \in U: \rho(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \leq q\rho(u_1, u_2)$

Организуем итерационный процесс (2):

$u_{n+1} = \varphi(u_n)$, $u_0 \in U$

<u>Тогда</u>:

1) $\exists! \alpha: \alpha \equiv \varphi(\alpha)$

2) Для любого $u_0 \in U$ $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \bar{u}$

3) $\bar{u} = \alpha$

4) $\rho(u_n, \alpha) \leq \frac{a}{1-q} \cdot q^n$, $a = \rho(u_1, u_0)$

Примечания.

U – метрическое, т.е. в нем есть метрика, в нем можно измерить разность между элементами

Метрика $\rho(u_1, u_2)$

Пространство называется метрическим, если

$\forall u_1, u_2 \in U \ \exists \rho(u_1, u_2)$ – число: 1. $\rho(u_1, u_2) \geq 0$, $\{\rho(u_1, u_2) = 0\} \Leftrightarrow \{u_1 = u_2\}$

2. $\rho(u_1, u_2) = \rho(u_2, u_1)$

3. $\rho(u_1, u_2) \leq \rho(u_1, u_3) + \rho(u_2, u_3)$

В качестве метрики может быть модуль разности, норма.

Если пространство нормировано, то $\rho(u_1, u_2) \equiv \|u_1 - u_2\|$

Если есть метрика, то можно ввести норму: $\|u\| = \rho(u, 0)$.

$\{u_n\} \to u$ означает, что $\rho(u_n, u) \to 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \rho(u_n, u) < \varepsilon$

Полное метрическое пространство – это метрическое пространство, в котором справедлив критерий Коши.

$\varphi: U \to U$ означает, что $\forall u \in U \ \varphi(u) \in U$

<u>Доказательство</u>:

Рассмотрим итерационный процесс (2) и расстояние:

$\rho(u_{n+1}, u_n) = \rho(\varphi(u_n), \varphi(u_{n-1})) \leq q \cdot \rho(u_n, u_{n-1}) \leq \ldots \leq q^n \cdot \rho(u_1, u_0)$

$\rho(u_{n+p}, u_n) \leq \rho(u_{n+p}, u_{n+p-1}) + \rho(u_{n+p-1}, u_n)$ (по 3 акс. метрики)

(Т.к. n и p любые, то это расстояние между любыми u)

$$\rho(u_{n+p}, u_n) \leq \rho(u_{n+p}, u_{n+p-1}) + \rho(u_{n+p-1}, u_n) \leq \sum_{k=0}^{p-1} \rho(u_{n+k+1}, u_{n+k}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} q^{n+k} \rho(u_1, u_0) \leq$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{p-1} q^k \cdot a \cdot q^n \leq a \cdot q^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \equiv \frac{a}{1-q} \cdot q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Т.о. последовательность $\{u_n\}$ – фундаментальная, а значит, т.к. пространство полное, – сходящаяся, т.е. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \bar{u}$, $\forall u_0 \in U$

$\bar{u} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(u_n) = \varphi(\bar{u})$, т.о. $\alpha = \bar{u}$,

т.е. решение существует и $\alpha = \bar{u}$

$\rho(u_n, u_{n+p}) \leq \dfrac{a}{1-q} \cdot q^n$

p – любое, при $p \to +\infty$:

$\rho(u_n, \bar{u}) = \lim\limits_{p \to +\infty} \rho(u_n, u_{n+p}) \leq \dfrac{a}{1-q} \cdot q^n$.

Пусть α: $\alpha = \varphi(\alpha)$

β: $\beta = \varphi(\beta)$

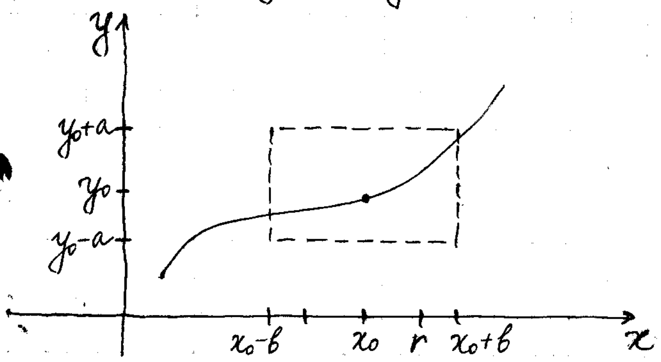
$\rho(\alpha,\beta) = \rho(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \le q \cdot \rho(\alpha,\beta)$

$(1-q)\cdot\rho(\alpha,\beta) \le 0$, т.к. $q<1$, то $1-q>0$, тогда

$\rho(\alpha,\beta) \le 0$, т.о. по 1 аксиоме $\{\rho(\alpha,\beta)=0\} \Leftrightarrow \{\alpha=\beta\}$

Доказано.

Задача: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$



Уравнение можно переписать в виде:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt \equiv \varphi(y)$$

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt = y^*(x)$$

$|y^*(x) - y_0| \le a$ (т.к. иначе для некоторых x функция не будет принадлежать рассматриваемому множеству)

$$|y^*(x) - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(t,y)|\,dt \le b\cdot K \le a \Rightarrow$$ $f(x,y)$ непрерывна на промежутке, а значит ограничена, т.е. $|f(x,y)| \le K$ в $\Pi(r,a)$

$|x - x_0| \le r$

$$\begin{cases} r \le b \\ r \le \dfrac{a}{K} \end{cases}$$

$\rho(u_1,u_2) = \|u_2 - u_1\|$

$\|g(x)\| = \max\limits_{a\le x\le b} |g(x)|$

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| = \left\|\int_{x_0}^{x} [f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))]\,dt\right\| \le$$

$$\le \max_{x_0-r\le x\le x_0+r} \left|\int_{x_0}^{x} [f'(\tilde{y},t)(y_1(t) - y_2(t))]\,dt\right| \le$$

пусть $\frac{\partial f}{\partial y}$ — непрерывна ($\Rightarrow$ ограничена)

$$\le L_1 \cdot r \cdot \max_{x_0 - r \le x \le x_0 + r} |y_1(t) - y_2(t)| = L_1 r \| y_1(t) - y_2(t) \| =$$

$(L_1 = |f'_y(\tilde{x}, \tilde{y})|$

$$= L_1 r \rho(y_1, y_2), \quad q = L_1 r < 1 \Rightarrow r < \frac{1}{L_1}$$

Т.о. $\begin{cases} r \le b \\ r \le \frac{a}{K} \\ r \le \frac{1}{L_1} \end{cases}$

Чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

В терминах нормы (для непрерывной функции sup и max совпадают):

$\lim\limits_{n \to +\infty} \max\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n - f \| = 0$

Критерий Коши: $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f_{n+p} - f_n \| = 0$

<u>Условие Липшица:</u> функция по какой-то переменной удовлетворяет условию Липшица, если существует такая константа, что

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| \le M \cdot |y_1 - y_2|$$

Иногда вместо $f'_y(x, y)$ непрерывна требуют условие Липшица для $f(x, y)$ по y.

Можно требовать $\exists f'_y(x, y)$ и ее ограниченности (без непрерывности).

Т.о. общая теорема доказана и задача имеет единственное решение.

Доказано.

Для системы, т.е. векторного случая, доказательство аналогично.

Линейные уравнения.

$$L_n[y] \equiv a_0(x) y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y(x) = f(x)$$

$L_n[y] = f(x)$

Предполагается, что $\begin{cases} a_i(x) - \text{непрерывные функции}, \\ a_0(x) \ne 0 \end{cases}$

Тогда можно рассматривать оператор:

$L_n[y] \equiv y^{(n)}(x) + p_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y(x) = f(x)$

Если $f(x) \equiv 0$, т.е. $L_n[y] = 0$ – однородное уравнение.

Лекция № 2. 19.02.2004г.

$$L_n[y] \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) = f(x) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – непрерывны и $f(x)$

Тогда верна теорема существования и единственности решения.

$p_0(x) \neq 0$

Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $p_0(x) \equiv 1$.

Однородное линейное уравнение.

$L_n[y] = 0 \quad (f(x) \equiv 0) \qquad (2)$

Если имеется какое-то конечное число решений уравнения (2), то любая их линейная комбинация – тоже решение уравнения (2).

<u>Теорема 1:</u>

$y_k(x),\ k = \overline{1,n} : L_n[y_k] \equiv 0$

тогда $\forall C_k,\ k = \overline{1,n}\ \ L_n\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right] \equiv 0.$

Предположим, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ какие-то функции.

Ф-ции линейно независимы, если их линейная комбинация тождественно равна 0 тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны 0.

Система ф-ций называется линейно зависимой, если линейная комбинация тождественно равна 0, но не все коэффициенты при этом равны 0.

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимы.

Каждая из них имеет хотя бы $(n-1)$ производных.

Тогда можно составить определитель: $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \ldots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$

Это т.н. определитель Вронского.

$$W \equiv W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 2 Пусть система $\{y_k(x)\}$, $k=\overline{1,n}$ линейно зависима. Тогда определитель Вронского этой системы равен 0, т.е. $W(x) \equiv 0$.

Доказательство: Для ф-ций $y_k(x)$ $\exists$ такая линейная комбинация, что она равна 0, а не все C_k равны 0.

Пусть C_n не равно 0, т.е.

$$\exists \tilde{C}_k,\ \tilde{C}_n \neq 0 : \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) = 0$$

$$y_n(x) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{C_k}{C_n} y_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} d_k y_k(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y_n^{(l)}(x) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} d_k y_k^{(l)}(x),\ l = \overline{0, n-1}$$

Значит, последний столбец есть линейная комбинация всех остальных, а значит, определитель равен 0: $W(x) \equiv 0$.

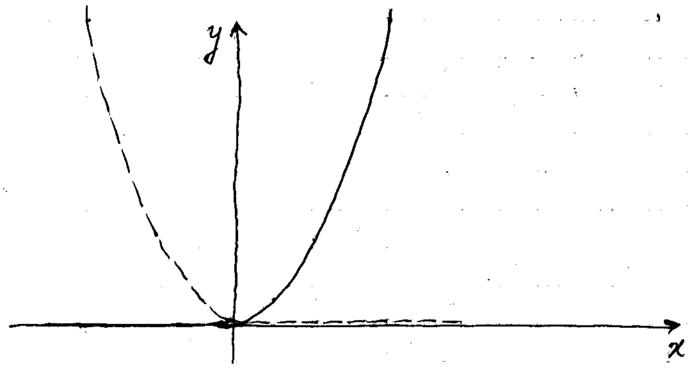
Доказано.

В случае линейной независимости ф-ций ничего об определителе Вронского сказать нельзя:

1) e^x, e^{-x}: $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1=-2$

2) $y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ 0, & x \ge 0 \end{cases}$



$W(x) \equiv 0$.

Теорема 3: Пусть система функций $\{y_k(x)\}$ линейно независима, а каждая из них – решение уравнения (2), т.е.

имеется система линейно независимых решений ОДУ,

тогда $\forall x : W(x) \neq 0$.

Доказательство:

Пусть $\exists x_0 : W(x_0) = 0$

$y_k^{(l)}(x_0) = y_{k,0}^{(l)}$ $k = \overline{1,n};$ $l = \overline{0, n-1}.$

$\vec{y}_{k,0}$

$\{ c_1 \vec{y}_{1,0} + c_2 \cdot \vec{y}_{2,0} + \ldots + c_n \vec{y}_{n,0} = \vec{0}$? можно ли найти такие c_k?

Определитель этой системы есть определитель Вронского (равен) в точке x_0, а $W(x_0) \neq 0$.

Т.о. определитель системы ~~не~~ равен 0, а значит существует нетривиальное решение, т.е. $\vec{c} \neq \vec{0}$.

$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(x) \Rightarrow \begin{cases} L_n[\tilde{y}] \equiv 0 \text{ (по теореме 1)} \\ \tilde{y}(x_0) = 0 \\ \tilde{y}'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{y}^{n-1}(x_0) = 0 \end{cases}$ задача $\Rightarrow$ (по теореме сущ. и един. реш.) $\tilde{y}(x) \equiv 0$ (т.к. это ф-ция удовл. усл. задачи, а значит и един.)

Тогда ф-ции $\{y_k(x)\}$ линейно зависимы. Имеем противоречие.

Доказано.

Теорема 4: Пусть $\{y_k(x)\}$, $k = \overline{1,n}$ — решения уравнения (2)

Тогда или $\forall x : W(x) \equiv 0$;
или $\forall x : W(x) \neq 0$.

Любая система из n линейно независимых решений уравнения (2) называется фундаментальной системой решений (или базисом).

Теорема 5: Всегда существует базис.

Если дано ур-ние (2) $L_n[y] = 0$, то

$\exists \{ \hat{y}_k(x) \} \equiv \hat{y}(x)$, $k = \overline{1,n}$ (базис).

Доказательство:

Возьмем n^2 чисел, таких что составленный из них определитель не равен 0.

$a_{k,l-1} \equiv a_k^{l-1}$, $\underset{\text{№ столбца}}{k} = \overline{1,n}$; $\underset{\text{№ строки}}{l} = \overline{1,n}$

$\begin{pmatrix} a_1^0 & a_1^1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ a_2^0 & a_2^1 & \ldots & a_2^{n} \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & \ldots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$

$\hat{y}_k(x): \quad L_n[\hat{y}_k]=0$

$\qquad y_k^{(l-1)}(x_0)=a_k^{l-1}$

Имеем задачу. В силу теоремы $\exists!$, существует и единственна ф-ция, удовл. этой задачи.

Всего таких ф-ций n.

Они и образуют базис: их n штук и их определитель Вронского не равен 0 (при том, что это решения), а значит, они и линейно независимы (т. 4).

Т.о. базис всегда существует, и базисов бесконечно много.

Доказано.

<u>Теорема 6</u>: Любое решение уравнения (2) может быть выражено линейной комбинацией базиса.

Пусть $y(x)$ $\forall$ реш. (2), тогда

$\exists!\ \vec{\hat{C}}=\{\hat{C}_1,\hat{C}_2,\hat{C}_3,\dots,\hat{C}_n\}: y(x)\equiv\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\hat{C}_k\hat{y}_k(x)}^{\hat{y}(x)}$, где

$\{\hat{y}_k(x)\}$ - базис.

<u>Доказательство</u>:

Возьмем любое x_0 и рассмотрим значение решения и его производных:

$y^{(l-1)}(x_0)=y_0^{(l-1)},\ l=\overline{1,n}$

$\left\{\sum_{k=1}^{n}\hat{C}_k\hat{y}_k(x)=y_0^{(l-1)},\ l=\overline{1,n}\right.$ система из n уравнений с n неизвестн.

$\exists!\ \vec{\hat{C}}$ (определитель этой системы - это определитель Вронского в x_0 для базиса, он не равен 0, значит, решение $\exists$ и оно единственно)

Т.о. начальным (начальным) условиям отвечают и $y(x)$ и $\hat{y}(x)$, а значит $y(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}\hat{C}_k\hat{y}_k(x)$.

Доказано

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

$p_i(x)=const\equiv p_i$

Будет ли ф-ция $e^{\lambda x}$ решением (2)?

$L_n[e^{\lambda x}]\equiv\sum_{i=0}^{n}p_i\lambda^{n-i}e^{\lambda x}=0$

$\Downarrow$

$\boxed{\sum_{i=0}^{n}p_i\lambda^{n-i}=0}$ характеристическое уравнение.

Если это уравнение имеет n различных вещественных корней, тогда мы имеем базис: $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$

Теперь предположим, что некоторые корни кратные. Если λ - корень кратности S, то ему можно сопоставить S решений: $x^\nu e^{\lambda x}$, $\nu=\overline{0,S-1}$.

Если корни комплексные, тогда ф-ции имеют вид:

$e^{(\alpha\pm i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x \pm i\sin\beta x)$ (т.к. p_i - вещ., то комплексные корни обязательно сопряж.)

$$0 \equiv L[u\pm iv] = L[u] \pm iL[v]$$

$$L[u]\overset{\Downarrow}{=}0 \quad и \quad L[v]=0$$

Т.о. корню $\lambda=\alpha\pm i\beta$ соотв. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пусть известно решение уравнения (1) $Y(x)$; $L_n[Y]=f(x)$

$$y(x) = Y(x) + u(x)$$

$$u(x) = y(x) - Y(x)$$

$$L_n[u] \equiv L_n[y-Y] \equiv L_n[y] - L_n[Y] \equiv f(x)-f(x)\equiv 0$$

Т.о. $u(x)$ - решения уравнения (2)

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \hat{C}_k \hat{y}_k(x) + Y(x)$$

Следовательно, любое решение уравнения (1) можно представить в виде суммы его частного решения и общего решения уравнения (2)

Нахождение частного решения уравнения (1) $Y(x)$:

Метод вариации постоянных.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \hat{C}_k \hat{y}_k(x) + Y(x), \quad L_n[Y]\equiv f(x)$$

Попробуем найти $Y(x)$ в виде:

$$Y(x) = c_1(x)\hat{y}_1(x) + \dots + c_n(x)\hat{y}_n(x)$$

$$Y'(x) = c_1(x)\hat{y}_1'(x) + \dots + c_n(x)\hat{y}_n'(x), + [c_1'(x)\hat{y}_1(x) + \dots + c_n'(x)\hat{y}_n(x)] = 0$$

$$Y''(x) = c_1(x)\hat{y}_1''(x) + \dots + c_n(x)\hat{y}_n''(x), + [c_1'(x)\hat{y}_1'(x) + \dots + c_n'(x)\hat{y}_n'(x)] = 0$$

$$Y^{(n-1)}(x) = c_1(x)\hat{y}_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)\hat{y}_n^{(n-1)}(x), + [c_1'(x)\hat{y}_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x)\hat{y}_n^{(n-2)}(x)] = 0$$

$$Y^{(n)}(x) = c_1(x)\hat{y}_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x)\hat{y}_n^{(n)}(x) + c_1'(x)\hat{y}_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\hat{y}_n^{(n-1)}(x)$$

4.03.2004г.

Лекция №3

$$L_n[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = f(x), \quad [p_0(x)\equiv 1]$$

$$y(x) = y^{0}(x) + y^{(z)}(x)$$

$$y^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$$

Предположим, что какое-то частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y^{(z)}(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + \ldots + c_n(x)y_n'(x) + [c_1'(x)y_1(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x)] = 0$$

пусть это выражение равно 0 (подберем такие $c_i(x)$).

$$y''(x) = c_1(x)y_1''(x) + \ldots + c_n(x)y_n''(x) + [c_1'(x)y_1'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x)] = 0$$

. . . .

$$y^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + [c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)] = 0$$

$$y^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \ldots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) + [c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)\cdot\frac{1}{p_0(x)}$$

$$L_n[y] \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, y_k(x)\right]}_{=0} + p_0(x)[c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)$$

Определитель полученной системы – определитель Вронского, который не равен 0, т.к. $y_i(x)$ – базис; следовательно, система имеет единственное решение.

Пусть $f(x)$ – квазимногочлен, т.е. имеет вид:

$$f(x) = [P_{m_1}(x)\sin\beta x + Q_{m_2}(x)\cos\beta x]e^{\alpha x}, \text{ а } p_i(x) \equiv const.$$

Тогда частное решение можно искать в виде:

$$y^{(z)}(x) = x^S[P_m(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x]e^{\alpha x},$$

$$m = \max(m_1, m_2)$$

s – обобщенная кратность: кратность корня $\mu = \alpha \pm i\beta$ в решении характеристического уравнения.

Если μ – не корень, то $S = 0$.

<u>Пример 1</u>: $y'' + y = 4\sin x$

$y'' + y = 4\sin x;$

$y'' + y = 0;$

$\lambda^2 + 1 = 0;$

$\lambda = \pm i$

$y = e^{\lambda x} = e^{\pm i x} = \cos x \pm i \sin x$

$y_1 = \cos x$

$y_2 = \sin x$

$y^{(0)}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$4\sin x = [4\sin x + 0\cdot\cos x]e^{0x}$

$m_1 = 0$; $P_0(x) \equiv 4$; $Q(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$,

т.о. $\mu = \alpha \pm i\beta = \pm i$, значит, $s = 1$.

Значит, частное решение надо искать в виде:

$y^{(2)}(x) = x[a\sin x + b\cos x]$

$y'(x) = [a\sin x + b\cos x] + x[a\cos x - b\sin x] =$
$= (a - bx)\sin x + (ax + b)\cos x$

$y''(x) = -b\sin x + (a - bx)\cos x + a\cos x + (ax + b)(-\sin x) =$
$= (-ax - 2b)\sin x + (2a - bx)\cos x$

$(-2b - 4)\sin x - ax\sin x + 2a\cos x - bx\cos x + ax\sin x + bx\cos x = 0$

$(-2b - 4)\sin x + 2a\cos x = 0.$

$\begin{cases} 2b + 4 = 0 \\ 2a = 0 \end{cases}$ $\quad b = -2$, $a = 0$

$y^{(2)}(x) = -2x\cos x.$

$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x.$

Ответ: $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x.$

Пример 2: $y'' + y = 4\sin x$ методом вариации постоянной

$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)\cos x = 4\sin x \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} \cos x \\ \sin x \end{matrix} \right.$

$c_2'(x) = +4\sin x\cos x$;

$c_2(x) = +\int \sin 2x \, d2x$;

$c_2(x) = -\cos 2x + c_2 = -2\cos^2 x + c_2$ ($\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ + учет конст.)

$c_1'(x) = -4\sin^2 x = -2(1 - \cos 2x)$

$c_1(x) = -2x + \sin 2x + c_1$

$c_1, c_2)$ $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x + \sin 2x\cos x - \sin x + 2\cos 2x\sin x$

$$- 2\cos^2 x\sin x = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x.$$

Ответ: $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x.$

Фазовое пространство.

Любое уравнение можно свести к нормальной системе:

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}(t))$$

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Автономная система:

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{(правая часть не зависит явно от } t\text{)}$$

Фазовым пр-вом называется n-мерное пространство, в котором задано решение, а t — параметр.

Время t, когда производная равна 0. Такие точки называются точками покоя. Эти точки — решения:

$$\dot{x} = f(x) = 0$$

1.03.2004г. Лекция №4.

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Система автономна, если она имеет вид:

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{(нет явной зависимости от } t\text{)}$$

n-мерное пространство, в котором „откладываются" точки в определенном t, называется фазовым.

Набор этих точек называется траекторией системы.

Исследование удается провести только в случае линейных функций.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{cases}$$ Линейная двумерная система.

$$\vec{x} \equiv x \equiv \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax}$$

Точками покоя называются точки, которые не движутся. Они характеризуются равенством нулю производной.

Точками покоя являются точки $x=0$.

На фазовой плоскости начало отсчета – всегда точка покоя.

Для решения системы нужно найти собственные значения матрицы A.

Каждому собственному значению ставится в соответствие собственный вектор.

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

I. Собственные значения действительные, вещественные и различные и не равны 0, т.е. $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ (или наоборот, это не имеет значения)

1. $\lambda_1\lambda_2>0$, т.е. λ_1 и λ_2 – одного знака.

$$Ah_1=\lambda_1 h_1$$

$$Ah_2=\lambda_2 h_2\,,\quad h_1 \text{ и } h_2 \text{ – собственные вектора.}$$

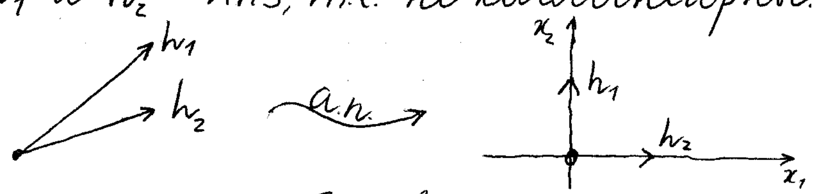
$$x=c_1h_1e^{\lambda_1 t}+c_2h_2e^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{x}=\lambda_1c_1h_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2c_2h_2e^{\lambda_2 t}$$

$$Ax=c_1e^{\lambda_1 t}\lambda_1h_1+c_2e^{\lambda_2 t}\lambda_2h_2$$

Т.о. $\dot{x}=Ax$ и x является решением.

h_1 и h_2 – ЛНЗ, т.е. неколлинеарны.



Аффинное преобразование = перенос + поворот + растяжение.

Не ограничивая общности, можно считать перпендикулярными и единичными.

Тогда, если h_1 и h_2 – репер, то $x=\xi_1h_1+\xi_2h_2$

$$x=\xi_1h_1+\xi_2h_2$$

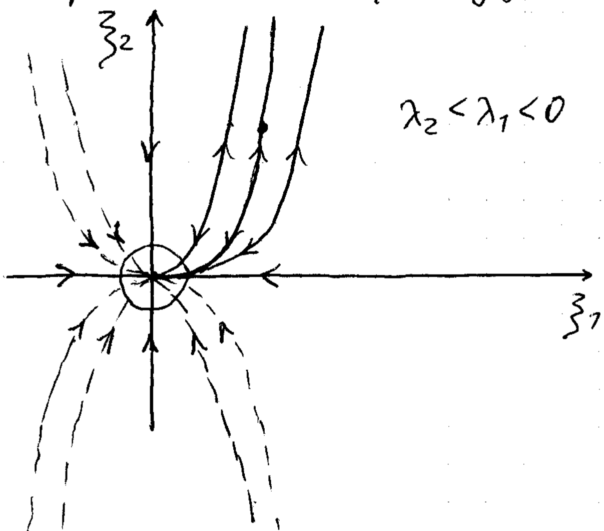
$$\xi_1=c_1e^{\lambda_1 t}$$

$$\xi_2=c_2e^{\lambda_2 t}$$

Т.о. вектор x можно представить как точку с координатами (ξ_1,ξ_2)

Фазовую траекторию достаточно построить в одном квадранте, а затем размножить отражение

Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$; $c_1, c_2 > 0$. Тогда с ростом t ξ_1 и $\xi_2 \to 0$; при этом ξ_2 будет стремиться быстрее ξ_1



Аналогично при $t \to -\infty$ ξ_2 растет быстрее ξ_1

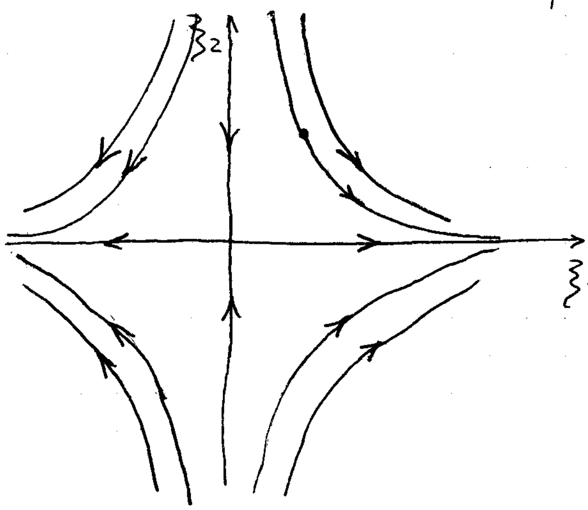
По теореме $\exists!$ через каждую точку проходит только одна кривая.

Для $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ то же самое но в противоположном направлении.

Это узел. Узел возможен только если λ_1 и λ_2 вещ., различны, одного знака.

Если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, то узел устойчив, при $t \to +\infty$ кривая приходит в точку покоя.

② $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, т.е. λ_1 и λ_2 – разного знака.



Пусть $t \to +\infty$

Если λ_1 и λ_2 вещ., различны и разных знаков, то это седло.

Седло всегда неустойчиво.

II λ_1 и λ_2 комплексные (соотв. обязательно различные).

$\lambda = \alpha \pm i\mu \quad (\mu \neq 0)$

$h = \frac{1}{2}(h_1 \mp i h_2)$

$x(t) \equiv x = \underbrace{c h e^{\lambda t} + \bar{c}\bar{h} e^{\bar{\lambda} t}}_{\text{действительная вектор-функция}}$

Рассмотрим $\mathbb{C}$-число $c e^{\lambda t} \equiv \zeta \equiv \xi_1 + i\xi_2$

$x(t) = (\xi_1 + i\xi_2)\cdot\frac{1}{2}(h_1 - ih_2) + (\xi_1 - i\xi_2)\cdot\frac{1}{2}(h_1 + ih_2) =$

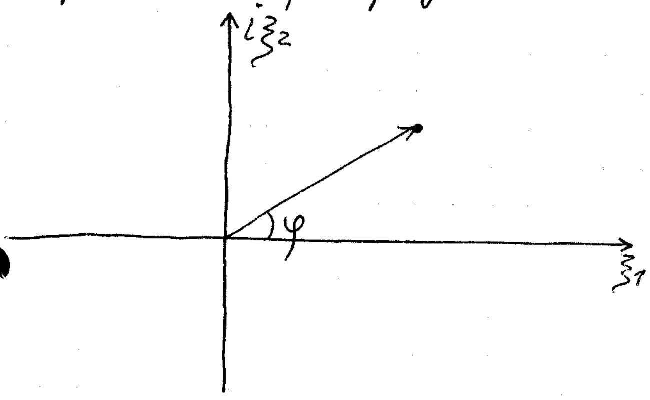
$= \frac{1}{2}\xi_1 h_1 - \cancel{\frac{1}{2}i\xi_1 h_2} + \cancel{\frac{1}{2}i\xi_2 h_1} + \frac{1}{2}\xi_2 h_2 + \frac{1}{2}\xi_1 h_1 + \cancel{\frac{1}{2}i\xi_1 h_2} - \cancel{\frac{1}{2}i\xi_2 h_1} + \frac{1}{2}\xi_2 h_2 =$

$= \frac{1}{2}\xi_1 h_1 + \frac{1}{2}\xi_2 h_2 + \frac{1}{2}\xi_1 h_1 + \frac{1}{2}\xi_2 h_2 = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$

$x(t) = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$

$\xi \equiv Ce^{\lambda t} \equiv \xi_1 + i\xi_2$

Аффинное преобразование: $h_1 \to e_1$; $h_2 \to i$



$\xi_1 + i\xi_2 \equiv \xi = \rho e^{i\varphi}$

$C = Re^{i\psi}$

$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\mu t}$

$\xi_1 + i\xi_2 \equiv \xi = \rho e^{i\varphi} = Re^{\alpha t} e^{i(\mu t + \psi)}$

$$\begin{cases} \rho = Re^{\alpha t} \\ \varphi = \mu t + \psi \end{cases}$$

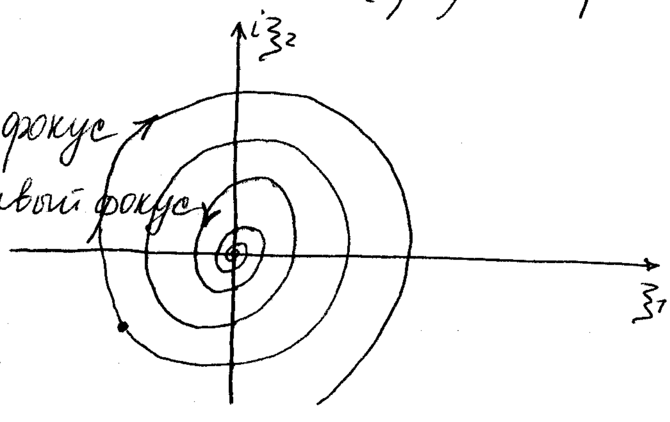
1) $\alpha \neq 0$ – фокус

$\alpha > 0$, $t \to +\infty$ – неуст. фокус

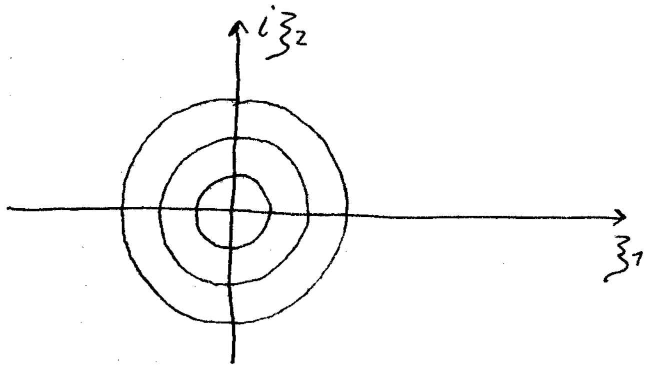
$\alpha < 0$, $t \to +\infty$ – устойчивый фокус

$\mu > 0$ – положит. напр.

$\mu < 0$ – отрицат. напр.



2) $\alpha = 0$ – центр



II. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

λ соотв. собственный вектор: $Ah_1 = \lambda h_1$

Возьмем $\forall h_2$, неколлинеарный с h, т.е. $\forall h_2 \nparallel h_1$

Тогда h_2 и h_1 – репер

$Ah_2 = \alpha h_1 + \beta h_2$

$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ – матрица A в репере $h_1 h_2$

Подобное преобразование: $C^{-1}AC$

При подобных преобразования собственные зн-ния не меняются.

Т.о. у A и A^* одни и те же собственные значения, а значит, $\beta = \lambda$

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

$$Ah_2 = \alpha h_1 + \lambda h_2$$

1) $Ah_1 = \lambda h_1$ и $\exists h_2 :\ Ah_2 = \lambda h_2$, т.е. $\alpha = 0$

2) $\exists h_2 :\ Ah_1 = \lambda h_1$

$Ah_2 = \alpha h_1 + \lambda h_2$, т.е. $\alpha \neq 0$

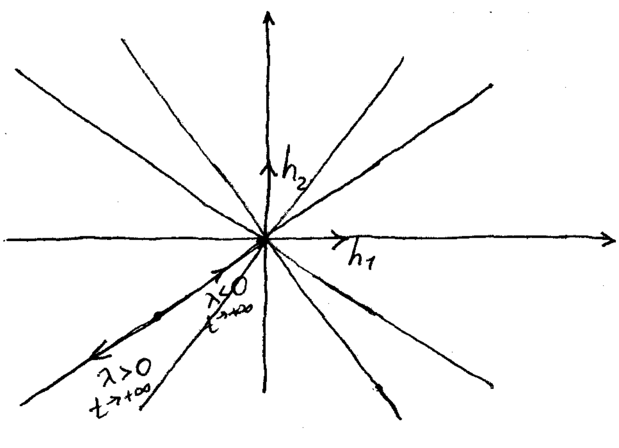
$$Ah = \lambda h$$

$$\alpha A h = \alpha \lambda h$$

$$A \alpha h = \lambda \alpha h$$

$Ah_1 = \lambda h_1$, тогда $Ah_2 = \lambda h_2 + h_1$

(1) $\Rightarrow x(t) = c_1 h_1 e^{\lambda t} + c_2 h_2 e^{\lambda t} = (c_1 h_1 + c_2 h_2) e^{\lambda t}$



Дикритический узел.

Возможен только при $a_1 = b_2$
$a_2 = b_1 =$

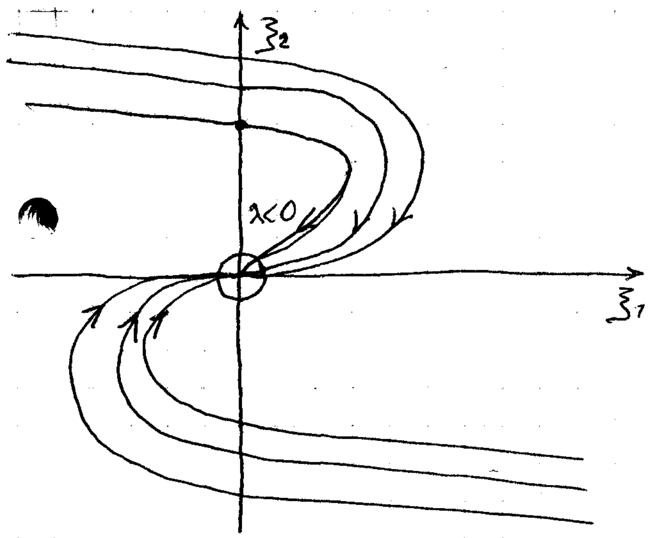
(2) $\Rightarrow$ Вырожденный узел:

$$x(t) = c_1 h_1 e^{\lambda t} + \cancel{\xi} c_2 (t h_1 + \cancel{c_2} h_2) e^{\lambda t}$$

$$x(t) = c_1 h_1 e^{\lambda t} + c_2 (t h_1 + h_2) e^{\lambda t} \equiv \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$$

$$\xi_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$

$$\xi_2 = c_2 e^{\lambda t}$$



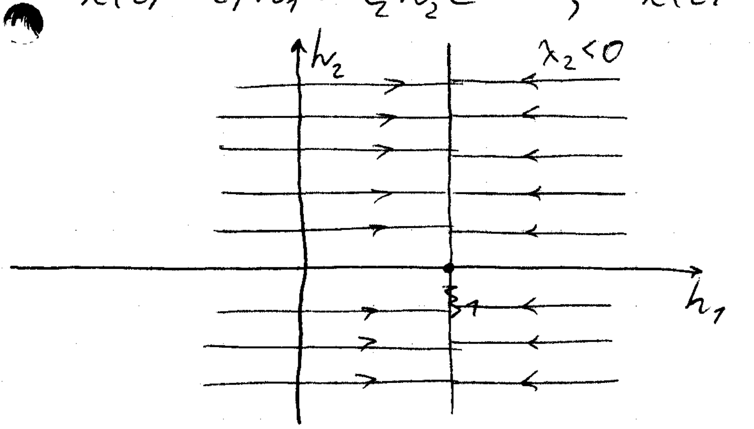
$\lambda \lessgtr 0$ - устойчивый

$\lambda \gtrless 0$ - неустойчивый

IV. $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ (вместе или по отдельности)

1) $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 \neq 0$

$x(t) = c_1 h_1 + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$; $x(t) = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$; $\xi_1 = c_1$; $\xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$



$\lambda_2 < 0$ - устойчивый

$\lambda_2 > 0$ - неустойчивый

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$x(t) = c_1 h_1 + c_2 h_2$

Любая точка есть точка покоя и решение.

18.03.2004г. Лекция № 5.

Устойчивость решений д.у. n-ного порядка.

Имеется автономная система:

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (1)$$

Предположим, что в некоторой точке t_0 (обычно берут $t=0$, ведь можно делать лин. замену $\tau = t - t_0$) $x(t_0) = \xi$, т.е.

$x(0) = \xi$.

$x(0) = \xi$

Тогда получаем задачу, которая имеет единственное решение.

Решение $\varphi(t,\xi)$

$\varphi(t,\xi)$ удовл. уравнению и $\varphi(t_0,\xi)=\xi$.

Точкой покоя системы называется такая ~~решения~~ точка a, что $f(a)=0$ (a - вектор в n-мерном пространстве).

Можно ввести $y(t) \equiv x(t) - a$. Левая часть при этом не изменится, а f изменится $\to \tilde{f}$.

Т.о., не ограничивая общности, можно считать $a=0$, ведь линейная замена $y(t) \equiv x(t) - a$ не влияет на непрерывность и дифференцируемость.

Точка a называется устойчивой (точка покоя), если

1) $\exists \rho : \cancel{\{\|x-a\|<\rho\ \exists\ \text{реш.}(1)\}}\ \forall \xi\ \ \|\xi - a\| < \rho\ \ \exists\, \varphi(t,\xi)$

Т.е. $\exists \rho$: в ρ окрестности точки a существует решение системы (1). ~~с нач. условиями~~

//с Норма $\|x\|$: 1) $\forall x \in X\ \ \|x\| \geq 0$ и $\{\|x\|=0\} \Leftrightarrow \{x=0\}$

2) $\forall \lambda\ \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

Если есть расстояние, то $\rho(x,y) \Rightarrow \|z\| \equiv \rho(z,0)$

и наоборот $\|z\| \Rightarrow \rho(x,y) \equiv \|x-y\|$

Две нормы называются эквивалентными, если $\exists$ такие c_1 и c_2 (незав. от x), что $\|x\|_\alpha \leq c_1 \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha$

В этом случае можно одну выразить через другую.

В конечномерном пространстве норм бесконечно много и все они эквивалентны.

В пространстве ф-ций:

1) пр-во C (непрер. ф-ций) $\|f\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f|$ (равном. норма)

2) пр-во разрывн. ф-ций ($\mathbb{L}_1$) абсолютно интегрируемых $\|f\| = \int_a^b |f|\, dx$

3) ф-ции с интегрир. квадр. ($\mathbb{L}_2$) $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}$

Эти три нормы наиболее употребимы.

Аналогичные нормы для векторов:

1) $\|x\|_1 = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

2) $\|x\|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$

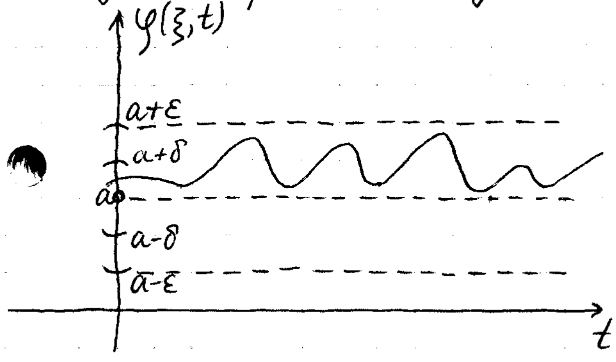
3) $\|x\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ (т.н. евклидова норма)

---

2) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\le\rho:\ \forall \xi\ \|\xi-a\|<\delta$

$\|\varphi(t,\xi)-a\|<\varepsilon\ \forall t\ge t_0$

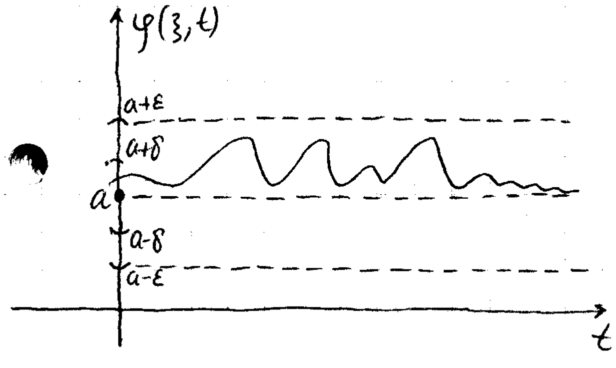
Одномерный случай:



Требования 1 и 2 отвечают устойчивости.

3) Условие асимптотической устойчивости:

$\lim\limits_{t\to+\infty}\|\varphi(\xi,t)-a\|=0$



<u>Теорема</u>: Пусть $f(x)\equiv Ax$, т.е. $\dot{x}=Ax$ линейная автономная система.

В этом случае очевидно, что $a\equiv 0$

Если $\lambda_j = a_j + i\mu_j$, $\alpha_j<0\ \forall j$; где λ_j − соб. зн. A

то положения равновесия асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению

$\forall f(x)$ Пусть $\exists A:\ R(x)\equiv f(x)-Ax$ $[\dot{x}=f(x)\equiv R(x)+Ax]$

$\exists \varepsilon > 0 : \exists c : \| f(x) \| \leq c \cdot \| x \|^{\varepsilon + 1}$

Если нашлась такая матрица A, что это утверждение верно, тогда, если $\forall j \ \lambda_j(A) \equiv \alpha_j + i\mu_j$, $\alpha_j \leq 0$, то $x \equiv a$ – асимптотически устойчива.

Если предположить, что f_i таковы, что $\exists \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}$ и непрерывны, тогда утверждение верно.

$\exists \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}$, тогда $f(x) \equiv f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{2}(x-a)^2$ (ф-ла Тейлора)

$$f(x) \equiv f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2$$

(ξ берется вместо a, чтобы не писать дальнейшие члены).

Если f – вектор-ф-ция, то ее производная – матрица:

$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ (якобиан).

$f(a) = 0$ (точка покоя).

$f'(x)$ и есть матрица A ($f'(a)$).

$\frac{1}{2} f''(x) \overset{(x-a)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} (x_k - a)(x_l - a)$.

Соответ~~ствен~~ственно, c это $n^2 k \|x\|^2$, а $\varepsilon = 1$,
где k – огран. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$

Доказательство:

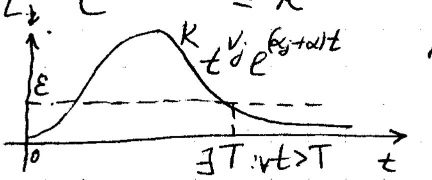
$\lambda_j(A) = \alpha_j + i\mu_j \Rightarrow u_j = t^{\nu_j} e^{\alpha_j t} \begin{cases} \cos \mu_j t \\ \sin \mu_j t \end{cases}$, где $\nu_j = \overline{0, s_j - 1}$

$\forall j : \alpha_j < 0 \Rightarrow \exists \alpha > 0 \ \forall j \ \alpha_j < -\alpha < 0 \quad [\alpha_j + \alpha < 0]$

Рассмотрим $\frac{|u_j|}{e^{-\alpha t}} = t^{\nu_j} e^{(\alpha_j + \alpha)t} \to 0$ при $t \to +\infty$

$\frac{t^{\nu_j}}{e^{-(\alpha_j + \alpha)t}}$ продиф. ν_j раз получим $\frac{C}{a e^{-(\alpha_j+\alpha)t}} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

$t^{\nu_j} e^{(\alpha_j + \alpha)t} \leq K$



на $[0; T]$ ф-ция непрер., а значит ограничена

Т.о. $\forall t \geq 0 \ \exists j \ |u_j| \leq K e^{-\alpha T}$

$\psi_i(t) \equiv \varphi(t, e_i)$, e_i – репер i-ой координаты

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$

Тогда $\varphi(\xi,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t)$ $[\psi_i(0) = \varphi(0;\xi_i) = e_i]$

Норма суммы меньше или равна сумме норм, а значит:

$$\|\varphi(t,\xi)\| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \|\psi_i(t)\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|\psi_i(t)\|\right) \|\xi\|_1 \le n \cdot \|\xi\|_1 \cdot \max_i \|\psi_i(t)\| \le$$

$$\le n^2 \|\xi\|_1 \cdot K e^{-\alpha t} \le C \|\xi\|_1 e^{-\alpha t}$$

Следовательно, норма любого решения допускает оценку: $\|\varphi(t,\xi)\| \le C \cdot \|\xi\|_1 e^{-\alpha t}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} \ \ \|\xi\| < \delta \ \ \|\varphi(t,\xi)\| < \varepsilon$

Т.о. система устойчива (точнее, ее положение равновесия) и асимптотически устойчива ($C\|\xi\| e^{-\alpha t} \xrightarrow[\alpha > 0]{t \to +\infty} 0$).

<u>Доказано.</u>

<u>Пр.</u> // $\forall \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\right) \cdot \max_{1 \le i \le n} |x_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\right) \|x\|_1$$

Т.о. мы оценили любую норму через первую, а $\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$ не зависит от x.

Т.о. $\|x\| = C\|x\|_1$

Значит, любая оценка для $\|x\|_1$ может быть перенесена на любую другую норму с соотв. конст. //

<u>Пример</u>: $\dot{x} = -\sin x$

$x \equiv 0 = a$

$\sin x = x + \bar{o}(x^2)$

$\dot{x} = -x + \bar{o}(x^2)$

Собств. зн. $-1 < 0 \Rightarrow$ т. 0 асимпт. устойчива.

Ответ: $a = 0$; ас. ус.

$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > \cos x$ (I квадрант).

$\frac{\sin x}{x} < 1$

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$1-2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \equiv \frac{x^2}{2}$$

$$\sin x = x + \bar{o}(x^2) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cancel{x}\, 1 + \bar{o}(x)$$

$$1-\frac{\sin x}{x} = \bar{o}(x)$$

25.03.2004г.

Лекция № 6.

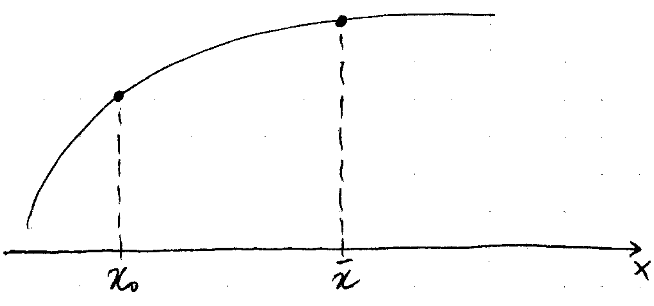
Первый интеграл (характеристики).

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} \equiv \vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}^{\,0} & (2) \end{cases}$$ Задача.

$$y_1(x) = \varphi(x_0, x, y_1^0, \dots, y_n^0)$$ (решения)

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x) = \varphi(x_0, x, y_1^0, \dots, y_n^0)$$



(одномерн. случай)

Решения в $\bar{x}$:
$$\left.\begin{aligned} y_1(\bar{x}) &= \varphi(x_0, \bar{x}, y_1^0, \dots, y_n^0) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n(\bar{x}) &= \varphi(x_0, \bar{x}, y_1^0, \dots, y_n^0) \end{aligned}\right\} \equiv \bar{\vec{y}}$$

Решим задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} \equiv \vec{y} = \vec{f}(x,\vec{y}) \\ \vec{y}(\bar{x}) = \bar{\vec{y}} \end{cases} \qquad \vec{y}^{\,0} \equiv \begin{cases} y_1^0(x_0) = \varphi(x_0, \bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = \varphi(x_0, \bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \end{cases}$$ // $y_i(x_0) \equiv y_i^0$!

Из точки x_0 можно попасть в $\bar{x}$ и наоборот (в силу предположения о выполнении теоремы существования и единственности).

Т.о. $\vec{y}_0$ и $\bar{\vec{y}}$ взаимозаменяемы.

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_0, x, c_1, \ldots, c_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_0, x, c_1, \ldots, c_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x_0, x, c_1, \ldots, c_n) \end{cases} \quad (3)$$
(переобозначим $y_i^0 \equiv c_i$)

Это же можно переписать в виде:
(не пишем x_0, т.к. формально c_i зависят от x_0).

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = c_1 \\ \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = c_n \end{cases}$$

Ф-ции φ не являются тождественными константами, но если подставить в них решение, то они обратятся в константы.

Каждая функция φ называется первым интегралом.

ПИ называется такая функция, что:

1) она не тождественная константа;
2) если в нее подставить решение системы ~~задачи~~, то она будет тождественной константой.

Это т.н. первый интеграл системы д.у.

Набор из n первых интегралов называется общим первым интегралом системы.

Можно дать другое, эквивалентное определение первого интеграла.

Теорема:
$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = c \quad (4)$$
Для того, чтобы такое соотношение было ПИ, необходимо и достаточно, чтобы функция φ удовлетворяла уравнению:
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \cdot f_k(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (5)$$

Доказательство: ■

Необх.: $\varphi(x, y_1, \ldots y_n) = c$ — ПИ

Доказать: φ удовл. (5)

Подставим в φ решение:

$\varphi(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \equiv c$

Т.о. φ зависит только от x, $\varphi \equiv c$ ($\psi(x) = c$), то

$\psi'(x) \equiv 0$

$$\frac{d}{dx}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\cdot\frac{d y_k}{d x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} f_k$$

(т.к. y_k – реш. и зависят только от x)

Т.о. $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\cdot f_k(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (5)$$

Другой подход:

$$0 \equiv d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} dy_k$$

Разделим на dx – получим то же. Доказано.

<u>Достат.</u>: $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = C$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} f_k(x, y_1, \dots, y_n) = 0$$

Доказать: Если y_i – реш. (1), то φ – тождеств. const

$\psi(x) = \varphi(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = C$ (подставл. решение)

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\cdot\frac{dy_k}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\cdot \cancel{\frac{dy_k}{dx}} f_k(x, y_1, \dots, y_n) = 0$$

(как сложн. ф-ция) берем произв. от обеих частей.

Т. о. $\frac{d\varphi}{dx} = 0 \Rightarrow \varphi(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \equiv \text{const}$ Доказано.

или $\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow C - \text{const} \Rightarrow \varphi(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = \text{const}$ ■

$$\frac{d\vec{y}}{dx} \equiv \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = dx \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)} = dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \dots y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)} = dx = \frac{dx}{1}$$

Умножим знаменатель на $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$: