Дифференциальные уравнения.

12.02.2004г.

Семинар №1.

Задача №1: $A+B\to X$, $t=0$, a,b - конц-ции, $a<b$; $x(t)$ - конц. X

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{dx}{dt}=kab-k(a+b)x+kx^2$$

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\int k\,dt$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}=\frac{Ab-Ax+Ba-Bx}{(a-x)(b-x)}\Rightarrow A=\frac{1}{b-a},\ B=\frac{1}{a-b}$$

$$\int\frac{dx}{(b-a)(a-x)}+\int\frac{dx}{(a-b)(b-x)}=\frac{1}{b-a}\ln(a-x)+\frac{1}{a-b}\ln(b-x)=\frac{1}{a-b}\ln\frac{b-x}{a-x}$$

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{b-x}{a-x}\Big|_0^x=kt\Big|_0^t$$

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{b-x}{a-x}+\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b}=kt;$$

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}=kt;$$

$$\frac{a(b-x)}{b(a-x)}=e^{(a-b)kt}\equiv c;$$

$$ab-ax=abc-bcx;$$

$$x(bc-a)=ab(c-1);$$

$$x=\frac{ab(c-1)}{bc-a},\ \text{где } c=e^{(a-b)kt}.$$

Дифференциальные уравнения 1 порядка.

№1 $x^2y^2dy=(x^3+y^3)dx;$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x};\quad \frac{y}{x}=u;\quad y=ux;$$

$$u'x+u=\frac{1}{u^2}+u;$$

$$u^2du=\frac{dx}{x};$$

$$\frac{u^3}{3}=\ln x\tilde{c};$$

$$u^3=\ln x^3c;$$

$$\frac{y^3}{x^3}=\ln x^3c.$$

№2 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

$y = uv; \quad y' = u'v + v'u;$

$u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2};$

$v(u' + 2xu) + v'u = xe^{-x^2};$

$u' = -2xu;$

$\frac{du}{u} = -2x\,dx;$

$\ln u = -x^2 \Rightarrow u = e^{-x^2}$

$v'u = xe^{-x^2};$

$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)e^{-x^2}.$

Ответ: $y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)e^{-x^2}.$

№3 $y' + xy = xy^3$

$y' + xy = 0$

$y_0(x) = c\,e^{-\frac{x^2}{2}} \longrightarrow v(x)$

$y(x) = u(x) \cdot v(x)$

$u'v + v'u + xuv = x(uv)^3$

$u'e^{-x^2/2} - xe^{-x^2/2}u + xe^{-x^2/2}u = xu^3e^{-\frac{3}{2}x^2}; \quad u' = xu^3e^{-x^2};$

$\int \frac{du}{u^3} = \int xe^{-x^2}dx;$

$-\frac{1}{2}u^{-2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{\tilde{c}}{2};$

$-\frac{1}{u^2} = -e^{-x^2} + \tilde{c};$

$u^2 = \frac{1}{e^{-x^2} + c};$

$u^2v^2 = \frac{1}{e^{-x^2} + c} \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{(e^{-x^2} + c)e^{x^2}} = \frac{1}{e^{x^2}c + 1}.$

Ответ: $y^2 = \frac{1}{e^{x^2}c + 1}.$

Семинар №2. 19.02.2004г.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$

$y=e^{\lambda x}$

$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

$\forall$ действ. корню кратности m соответствует m линейно независимых решений.

$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ldots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}$

$\forall$ паре корней $\alpha\pm i\beta$ кратности m соответствует m ЛНЗ пар решений:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$; $xe^{\alpha x}\cos\beta x;\ldots;\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x$; $xe^{\alpha x}\sin\beta x;\ldots;\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Совокупность таких решений образует ФСР.

№1. $y^{(4)}+y''+6y'+4y=0$

$\lambda^4+\lambda^2+6\lambda+4=0$

$\lambda=-1;$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^4+\lambda^2+6\lambda+4 & \lambda+1 \\ \lambda^4+\lambda^3 & \lambda^3-\lambda^2+2\lambda+4 \\ -\lambda^3+\lambda^2 & (\lambda^2(\lambda+2)+(2-\lambda)(2+\lambda)) \\ -\lambda^3-\lambda^2 & \\ 2\lambda^2+6\lambda & \\ 2\lambda^2+2\lambda & \\ 4\lambda+4 & \end{array}$$

$(\lambda=-2)$ $\lambda=-1$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3-\lambda^2+2\lambda+4 & \lambda+1 \\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^2-2\lambda+4 \\ -2\lambda^2+2\lambda & \end{array}$$

$\lambda=1\pm\sqrt{3}i$

$\lambda=-1;-1;\ 1\pm\sqrt{3}i$

Т.о. $y_1=e^{-x}$

$y_2=xe^{-x}$

$y_3=e^{x}\cos\sqrt{3}x$

$y_4=e^{x}\sin\sqrt{3}x$

$\lambda^4+\lambda^2+6\lambda+4$ Схема Горнера

	1	0	1	6	4
-1	1	-1	2	4	0
-1	1	-2	4	0	0

Ответ: $y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{x}\cos\sqrt{3}x+c_4e^{x}\sin\sqrt{3}x$.

№2 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm i$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cancel{co}\, x\cos x + c_4 x \sin x.$$

Ответ: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x\cos x + c_4 x \sin x.$

Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$n = 2.$ $y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – решение однородного ДУ (общее)

$y_н(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$ – решение неоднородного ДУ (общее)

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{-y_2(x) f(x)}{W[y_1, y_2]}$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x) f(x)}{W[y_1, y_2]}$$

№3 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}$$

$$c_1'(x) = \frac{-xe^x \cdot \frac{e^x}{x^2}}{e^{2x}} = -\frac{1}{x} \Rightarrow c_1(x) = -\ln|x| + c_1$$

$$c_2'(x) = \frac{e^x \cdot \frac{e^x}{x^2}}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{1}{x} + c_2$$

$$y(x) = (c_1 - \ln|x|)e^x + \left(c_2 - \frac{1}{x}\right)e^x x.$$

Ответ: $y(x) = (c_1 - \ln|x|)e^x + \left(c_2 - \frac{1}{x}\right)xe^x$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - \ln|x| \cdot e^x - e^x$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \ln|x|$

„Метод Новикова":

$y(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x = e^x \underbrace{(c_1(x) + x c_2(x))}_{c(x)} = c(x) e^x$

$(c(x) e^x)'' = (c'(x) e^x + c(x) e^x)' = c''(x) e^x + c'(x) e^x + c'(x) e^x + c(x) e^x =$

$= c''(x) e^x + 2c'(x) e^x + c(x) e^x$

$c''(x) e^x + \cancel{2c'(x)} e^x + \cancel{c(x)} e^x - \cancel{2c'(x)} e^x - \cancel{2c(x)} e^x + \cancel{c(x)} e^x = \frac{e^x}{x^2}$

$c''(x) = \frac{1}{x^2};$

$c'(x) = -\frac{1}{x} + c_1;$

$c(x) = -\ln|x| + c_1 x + c_2;$

$y(x) = e^x (c_1 x - \ln|x| + c_2).$

$y'' - 2ay' + a^2 y = f(x)$

$c''(x) e^{ax} = f(x)$

Для ~~n~~ случая $(\lambda - a)^n = 0$

$c^{(n)}(x) e^{ax} = f(x)$

Home 1) $y^{(5)} + 5y^{(4)} + 10y''' + 10y'' + 5y' + y = x^3 e^{-x}$

2) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$ (стаць. и Новиков)

3) $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$ (стаць.)

28.02.2004г. Семинар №3.

Метод комплексных амплитуд.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

$$f(x) = (P(x)\cos px + S(x)\sin px)e^{\delta x}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_*(x)$$

однород. (общее) неоднор. (частное)

$$y_*(x) = (\tilde{P}(x)\cos px + \tilde{S}(x)\sin px)e^{\delta x}$$

степени, макс. из $P(x)$ и $S(x)$

если $\delta \pm ip$ не корень характер. уравнения.

Если $\delta \pm ip$ – корень х.у. кратности μ, то

$$y_*(x) = (\tilde{P}(x)\cos px + \tilde{S}(x)\sin px)e^{\delta x}x^{\mu}$$

МКА: рассмотрим вспомогательное уравнение:
Если в правую часть входит только sin или cos.

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = P(x)e^{(\delta + ip)x}$$

$$z^*(x) - ?$$

$$y^*(x) = \mathrm{Re}\,(\text{или } \mathrm{Im})\, z^*(x)$$

№1. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$D = -16 \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i$$

Т.о. $y_{одн.}(x) = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x$

$$z'' + 2z' + 5z = 2e^{ix}$$

$$z = Ae^{ix};\ z'' = -Ae^{ix};\ z' = Aie^{ix}$$

$$-Ae^{ix} + 2Aie^{ix} + 5Ae^{ix} = 2e^{ix}$$

$$A(-1 + 2i + 5) = 2$$

$$A = \frac{2}{2i+4} = \frac{2(4-2i)}{16+4} = \frac{2-i}{5}$$

$$z = \left(\frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right)e^{ix} = \frac{(2-i)(\cos x + i\sin x)}{5}$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{2\cos x + \sin x}{5}$$

$T.o.\ y(x) = c_1 e^{-x}\sin x + c_2 e^{-x}\cos x + \frac{(2\cos x + \sin x)}{5}.$

№2 $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$

$\lambda^2 - 9 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 3$

$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

$z'' - 9z = e^{(3+i)x}$

$z = Ae^{(3+i)x} \quad z'' = (8+6i)Ae^{(3+i)x}$

$A(8+6i-9) = 1$

$A = \frac{1}{-1+6i} = \frac{1+6i}{-(1-6i)(1+6i)} = -\frac{1+6i}{37}$

$z = -e^{3x}\cdot\left(\frac{1+6i}{37}(\cos x + i\sin x)\right)$

$\mathrm{Re}\, z = -e^{3x}\left(\frac{\cos x - 6\sin x}{37}\right)$

$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \frac{e^{3x}(\cos x - 6\sin x)}{-37}.$

~~№3 $y^{(4)}$~~ $\boxed{\text{Training}}$ 1) $y^{(4)} - y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$

2) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

3) $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x.$

№3 $y'' + y = x\sin x$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

$\{y_0(x) = c_1(\cos x + \sin x) + c_2 x(\cos x + \sin x)\}$

$z'' + z = xe^{ix} \qquad y_0(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x$

$z = (Ax+B)xe^{ix} = (Ax^2 + Bx)e^{ix}$

$\{z'' = [(2Ax+B)e^{ix} + i(Ax^2+Bx)e^{ix}]' =$

$= \{2Ae^{ix} + 2Axie^{ix} + Bie^{ix} + i(2Ax + B)e^{ix} - (Ax^2+Bx)e^{i}$

$= \}$

$z'' = \{(Ax^2+Bx)e^{ix}\}'' = \{(2Ax+B)e^{ix} + i(Ax^2+Bx)e^{ix}\}' =$

$= (2A)e^{ix} + i(2Ax+B)e^{ix} - (Ax^2+Bx)e^{ix} + i(2Ax+B)e^{ix} =$

$z'' + z = 2Ae^{ix} + 2i(2Ax+B)e^{ix} \qquad 2A + 4iAx + 2iB = x$

$A = \frac{1}{4i};\ 2iB = -\frac{2}{4i} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$A = \frac{-i}{4}$; $B = \frac{1}{4}$

$z(x) = (-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x)(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{4}(x - ix^2)(\cos x + i\sin x)$

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{4}(-x^2\cos x + x\sin x)$

$$\left\{\begin{array}{l} y_0(x) = (\underset{C_1}{\cancel{C_1 + C_2 x}})(\cos x + \sin x) + \frac{1}{4}x(\cancel{x}\cos x + \cancel{x}\sin x) \\ y(x) = (\underset{C_1}{\cancel{C_1 + C_2 x}})(\cos x + \sin x) + \frac{1}{4}(\sin x - x^2\cos x) \end{array}\right\}$$

$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{4}(\sin x - x^2\cos x)$

13.2004г.

Training

1. $y^{(4)} - y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$

$y'''' - y'' - 2y' + 2y = 0$

$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$;

$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) - 2(\lambda-1) = (\lambda^3 + \lambda^2 - 2)(\lambda - 1)$

$\lambda_2 = 1$;

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 + \lambda^2 - 2 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ \hline 2\lambda^2 - 2 & \\ 2\lambda^2 + 2\lambda & \\ \hline 2\lambda - 2 & \end{array}$$

$\lambda_{3,4} = -1 \pm i$

$y^{(0)}(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}\cos x + c_4e^{-x}\sin x$;

$z^{(4)} - z'' + 2z' + 2z = e^{2ix}$;

$z = Ae^{i2x}$;

$z^{(4)} = 16Ae^{i2x}$; $z'' = -4Ae^{2ix}$; $z' = 2Aie^{2ix}$;

$16A + 4A - 4Ai + 2A = 1$;

$A(22 - 4i) = 1$;

$A = \frac{22 + 4i}{484 + 16} = \frac{11 + 2i}{250}$

$z = \frac{11 + 2i}{250}(\cos 2x + i\sin 2x)$

$\operatorname{Re} z = \frac{11\cos 2x - 2\sin 2x}{250}$

Т.о. $y(x) = c_1 e^{-x}\sin x + c_2 e^{-x}\cos x + \frac{2\cos x + \sin x}{5}$.

№2 $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$

$\lambda^2 - 9 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 3$

$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

$z'' - 9z = e^{(3+i)x}$

$z = Ae^{(3+i)x} \quad z'' = (8+6i)Ae^{(3+i)x}$

$A(8+6i-9) = 1$

$A = \frac{1}{-1+6i} = \frac{1+6i}{-(1-6i)(1+6i)} = -\frac{1+6i}{37}$

$z = -e^{3x}\cdot\left(\frac{1+6i}{37}(\cos x + i\sin x)\right)$

$\operatorname{Re} z = -e^{3x}\left(\frac{\cos x - 6\sin x}{37}\right)$

$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \frac{e^{3x}(\cos x - 6\sin x)}{-37}$.

~~№3 $y^{(4)}$~~ $\boxed{\text{Training}}$ 1) $y^{(4)} - y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$

2) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

3) $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$.

№3 $y'' + y = x\sin x$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

$\{y_0(x) = c_1(\cos x + \sin x) + c_2 x(\cos x + \sin x)\}$

$z'' + z = xe^{ix} \qquad y_0(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$

$z = (Ax+B)xe^{ix} = (Ax^2 + Bx)e^{ix}$

$\{z'' = [(2Ax+B)e^{ix} + i(Ax^2+Bx)e^{ix}]' =$

$= \{2Ae^{ix} + 2Axie^{ix} + Bie^{ix} + i(2Ax + B)e^{ix} - (Ax^2+Bx)e^{ix} =$

$= \}$

$z'' = \{(Ax^2+Bx)e^{ix}\}'' = \{(2Ax+B)e^{ix} + i(Ax^2+Bx)e^{ix}\}' =$

$= (2A)e^{ix} + i(2Ax+B)e^{ix} - (Ax^2+Bx)e^{ix} + i(2Ax+B)e^{ix} =$

$z'' + z = 2Ae^{ix} + 2i(2Ax+B)e^{ix} \qquad 2A + 4iAx + 2iB = x$

$A = \frac{1}{4i}; \; 2iB = -\frac{2}{4i} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$A = \frac{-i}{4}$; $B = \frac{1}{4}$

$z(x) = \left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{4}(x - ix^2)(\cos x + i\sin x)$

$\operatorname{Im} z = \frac{1}{4}(-x^2\cos x + x\sin x)$

$$\begin{cases} y_0(x) = (\cancel{c_1 + c_2 x})_{C_1}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{4}x(\cos x + \sin x) \\ y(x) = (\cancel{c_1 + c_2 x})_{C_1}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{4}(\sin x - x^2\cos x) \end{cases}$$

$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{4}(\sin x - x^2\cos x)$

3.03.2004г.

Training.

№1. $y^{(4)} - y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$

$y'''' - y'' - 2y' + 2y = 0$

$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$;

$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) - 2(\lambda-1) = (\lambda^3 + \lambda^2 - 2)(\lambda - 1)$

$\lambda_2 = 1$;

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 + \lambda^2 - 2 & \lambda - 1 \\ \underline{\lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ 2\lambda^2 - 2 & \\ \underline{2\lambda^2 + 2\lambda} & \\ 2\lambda - 2 & \end{array}$$

$\lambda_{3,4} = -1 \pm i$

$y^{(0)}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}\cos x + c_4 e^{-x}\sin x$;

$z^{(4)} - z'' + 2z' + 2z = e^{2ix}$;

$z = Ae^{i2x}$;

$z^{(4)} = 16Ae^{i2x}$; $z'' = -4Ae^{2ix}$; $z' = 2Aie^{2ix}$;

$16A + 4A - 4Ai + 2A = 1$;

$A(22 - 4i) = 1$;

$A = \frac{22 + 4i}{484 + 16} = \frac{11 + 2i}{250}$

$z = \frac{11 + 2i}{250}(\cos 2x + i\sin 2x)$

$\operatorname{Re} z = \frac{11\cos 2x - 2\sin 2x}{250}$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-x}\cos x + C_4 e^{-x}\sin x + \frac{11\cos x - 2\sin 2x}{37}.$$

№2 $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x$

$y'' - 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$y^{(0)}(x) = C_1 e^{x}\cos x + C_2 e^{x}\sin x$

18.03.2004г.

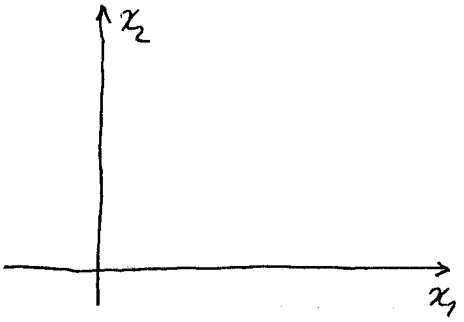
Семинар №4.

Фазовые пространства и фазовые „портреты"

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) \end{cases} \Rightarrow x_2(x_1)$$

параметрич. уравнение фазовой кривой

явное уравнение фазовой кривой



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - (a_{11}+a_{22})\lambda + \lambda^2;$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + |A| = 0;$$

$$D = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4|A| = a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} =$$

$$= (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21};$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2};$$

или $\lambda_{1,2} = \dfrac{\mathrm{tr} A \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2 A - 4\det A}}{2}$.

$$A\vec{x} = 0$$

$\det A \neq 0$ только трив. решение. $\vec{x} = \vec{0}$

$\det A = 0$ есть нетрив. решение.

У этой системы – единственная точка покоя $\vec{0}$.

λ_1 и λ_2

$\exists$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1 и λ_2 – действит., $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (узел) $\rightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (уст.); $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (неуст.)

$\lambda_1\lambda_2 < 0$ (седло)

Дикритич. узел: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Вырожденный узел ($\lambda_1 = \lambda_2$, но A не диаг.)

Все это относится к точке $(0;0)$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta = \overline{\lambda_2}$ – фокус $\to$ устойч. $\alpha<0$; $\to$ неустойч. $\alpha>0$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det A = \alpha^2+\beta^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

т. $\vec{x}=\vec{0}$ – фокус ($\alpha\neq 0$) или центр ($\alpha=0$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}\Bigg|\, i \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = x_1(\alpha+i\beta) + x_2(\alpha - i\beta) \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1+ix_2) + \beta(ix_1 - \underline{\cancel{i}x_2)\ \cancel{i}(-i)} \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$$

$$\alpha(x_1+ix_2) + i\beta(x_1+ix_2) = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 \qquad x_1+ix_2 = z = re^{i\varphi}$$

$$r = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\dot{z} = (\alpha+i\beta)z$$

$\cancel{i}$ $x_1 + ix_2 = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$

$$x_1 = r\sin\varphi$$

$$x_2 = r\cos\varphi$$

$$\dot{r}e^{i\varphi} + ire^{i\varphi}\cdot\dot{\varphi} = (\alpha+i\beta)re^{i\varphi}$$

$$\dot{r} = \alpha r \qquad r(t) = Ce^{\alpha t}$$

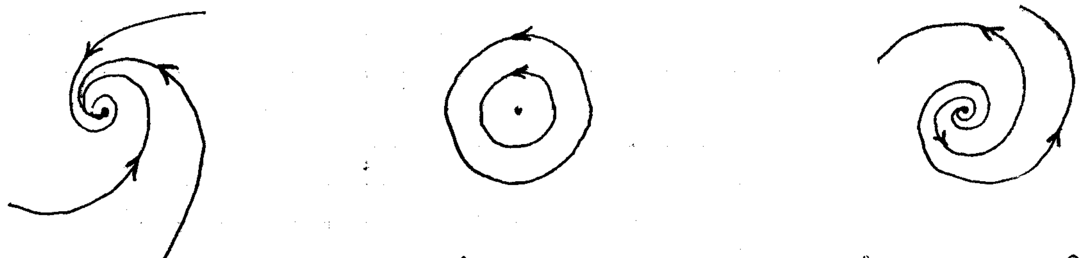
$$\dot{\varphi} = \beta \Rightarrow \varphi(t) = \beta t + \varphi_0$$

$$t = \frac{\varphi-\varphi_0}{\beta}$$

$$r = Ce^{\frac{\varphi-\varphi_0}{\beta}\alpha} = \tilde{C}e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$$

$r = \tilde{C}e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$ – уравнение логарифмической спирали.

$\beta>0$ $\alpha>0$ $\alpha=0$ $\alpha<0$



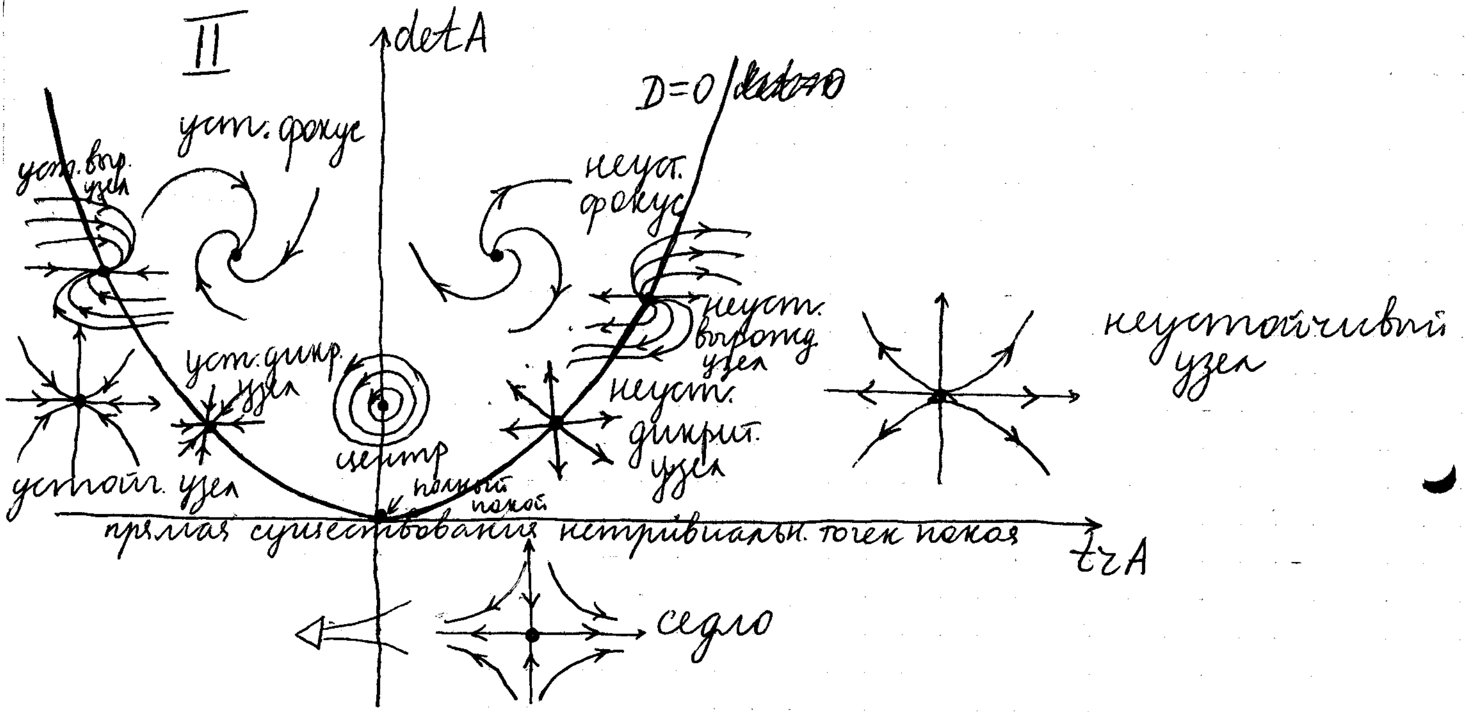
$\beta>0$, поэтому направление против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении.

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A = 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} \qquad D = \operatorname{tr}^2 A - 4 \operatorname{Det} A$$



Область устойчивости фазовой системы – II квадрант

25.03.2004 г.

Семинар № 5.

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases}$$ Линейная система.

Нелинейная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases}$$

Точка покоя $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (лин. случай)

$\det A \neq 0$, тогда единств. точка $(0; 0)$

Попытаемся решить систему:

$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ точки покоя (нелин. случай) набор $M_1(x_1; y_1)$

. . . . . .

$M_n(x_n; y_n)$

В каждой точке покоя можно провести линеаризацию. Каждый раз начало коорд. переносится в точку покоя, а ф-ции разл. по Тейлору

Первая точка покоя $M_1(x_1; y_1)$: $x = x_1 + \xi$

$y = y_1 + \eta$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{\xi} = P(x_1; y_1) + \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{M_1}\xi + \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{M_1}\eta + \ldots \\ \dot{y}_1 + \dot{\eta} = Q(x_1, y_1) + \frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{M_1}\xi + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_{M_1}\eta + \ldots \end{cases}$$

(эти члены отбрасываем: только первое приближение)

$$\begin{cases} P(x_1, y_1) = 0 \\ Q(x_1, y_1) = 0 \end{cases}$$ – определение точки покоя $M_1(x_1, y_1)$

$\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$, т.о.:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{a_{11}}\Big|_{M_1}\xi + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{a_{12}}\Big|_{M_1}\eta \\ \dot{\eta} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{a_{21}}\Big|_{M_1}\xi + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}}_{a_{22}}\Big|_{M_1}\eta \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\dot{\xi} = \\ \dot{\eta} = \end{matrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{M_1}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}$$

Это т.н. исследование системы на устойчивость по первому приближению.

№1. $$\begin{cases} \dot{x} = xy + 4 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 17 \end{cases}$$

Решение: $$\begin{cases} xy = -4 \\ x^2 + y^2 - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{4}{x}$$

$x^2 + \frac{16}{x^2} - 17 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 = 9$

$x - \frac{4}{x} - 3 = 0;$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$D = 9 + 16 = 25 \qquad x_{1,2} = 4; -1$

$x^2 + 3x - 4 = 0 \qquad x_{3,4} = -4; 1$

$M_1(4; -1)$; $M_2(-4; 1)$; $M_3(1; -4)$; $M_4(-1; 4)$

Исследуем на устойчивость по первому приближению:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x\\ 2x & 2y\end{pmatrix}$$

$tr A = 3y$

$det A = 2y^2 - 2x^2$

$\lambda^2 - tr A\,\lambda + det A = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 - 8y^2 + 8x^2}}{2} = \frac{3y \pm \sqrt{y^2+8x^2}}{2}$$

$M_1(-1;4)$: $tr = 12$; $det = 30$

$\lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{6}$ – неустойчивый узел

$M_2(-4;1)$ $tr = 3$; $det = -30$

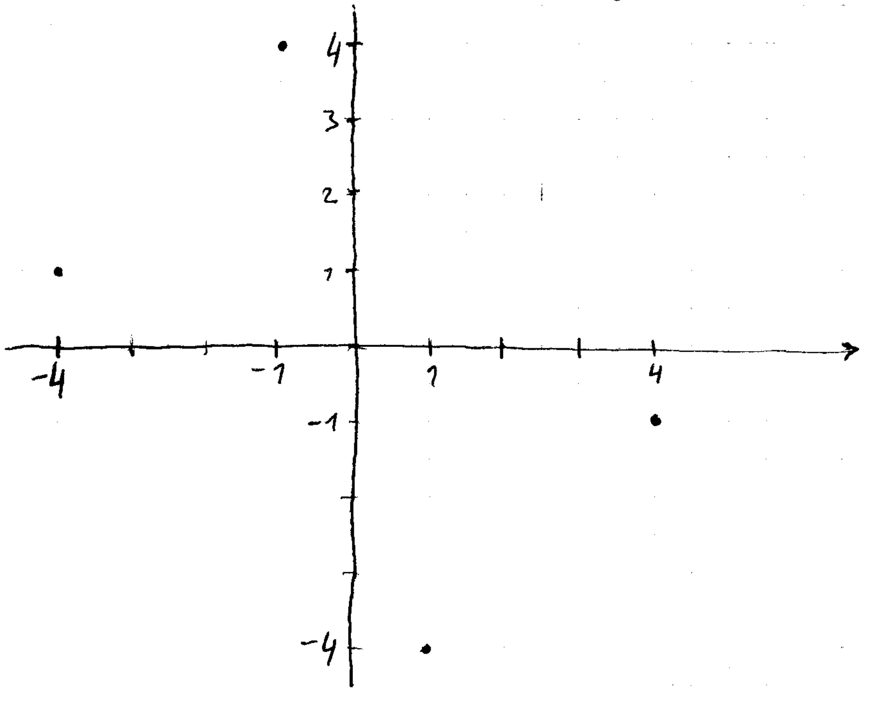
$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2}$ – седло

$M_3(4;-1)$ $tr = -3$; $det = -30$

$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{129}}{2}$ – седло

$M_4(1;-4)$ $tr = -12$; $det = 30$

$\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{6}$ – устойч. узел.



Семинар №6. 1.04.2004г.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\dots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = b(x_1,\dots,x_n,z) \quad (*)$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}$$

$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_i$ (n незав. ПИ)

$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$ - общее решение ур-ния (*)

№1. $\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + tg z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{tg z} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

$tg z + ctg x = c_1$

$dy = tg z \, d(tg z)$

$y - \frac{1}{2} tg^2 z = c_2$

$$\begin{cases} tg z + ctg x = c_1 \\ y - tg^2 z/2 = c_2 \end{cases}$$

$\Phi(tg z + ctg x,\ y - tg^2 z/2) = 0$

общее решение уравнения

№2 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad | z = 2x \quad y = 1$

$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{0} \Rightarrow$ формально $dz = 0$ $z = c_2$

$\begin{cases} \frac{x}{y} = c_1 \end{cases}$

$x = c_1 y \qquad z = c_2$

$y=1 \Rightarrow 2x = c_2 \Rightarrow x = \frac{c_2}{2}$

$x = c_1 y \Rightarrow x = c_1 \}$

$$\begin{cases} xy = c_1 \\ z = c_2 \end{cases} \Rightarrow \Phi(xy, z) = 0$$

общее решение

Т.о. $z = F(xy)$

$\begin{cases} z = C_2 \\ xy = C_1 \\ y = 1 \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 \\ z = 2x \\ z = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 \\ z = 2C_1 \\ z = C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{2}$

$\Downarrow$

$z = 2xy$

$z = 2xy$ – решение, удовлетв. начальным условиям.

№3 $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{0} \Rightarrow du = 0$
$u = C_1$

$\frac{x}{y} = C_2; \quad \frac{x}{z} = C_3$

$\begin{cases} u = C_1 \\ x = C_2 y \\ x = C_3 z \end{cases}$

Общее решение: $\Phi(u, \frac{x}{y}, \frac{x}{z}) = 0$

$u(x, y, z)\Big|_{y^2+z^2=2} = \frac{2}{x^2}$

$\left\{ \frac{x^2}{C_2^2} + \frac{x^2}{C_3^2} = 0 \right.$ $\quad x^2C_2^2 + x^2C_3^2 = 0$

$\frac{2}{x^2} = C_1$ $\quad C_2^2 + C_3^2 = 0$

$2 = C_1 x^2$

$x^2 = \frac{2}{C_1}$

$\frac{2}{C_1} = C_2^2 y^2$

$\left. 2 = C_1 C_2^2 y^2 \right\}$

$\frac{x^2}{C_1^2} + \frac{x^2}{C_2^2} = 2$ $\quad \frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} = \frac{2}{x^2}$

$\{x^2C_2^2 + x^2C_1^2 = 2C_1^2C_2^2\}$ $\quad \frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} = C_3$

Тренинг: $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$

Найти поверхность прох. через кривую

$y = x^2, \ z = x^3$

Семинар №7 8.04.2004г.

№1 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x-3y)$ $x=1$ $yz+1=0$

$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow xy = c_1 \Rightarrow \cancel{z}$

$\frac{dx-3dy}{x-3y} = \frac{dz}{z^2(x-3y)}$

$d(x-3y) = \frac{dz}{z^2};$

$x-3y+\frac{1}{z} = c_2$

$\begin{cases} xy = c_1 \\ x-3y+\frac{1}{z} = c_2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-\frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = c_1 \\ 1-3t-t = c_2 \end{cases}$ $\begin{cases} t=c_1 \\ 1-4t=c_2 \end{cases} \Rightarrow 1-4c_1 = c_2$

№2 $(ly-nz)\frac{\partial z}{\partial x} + (mz-lx)\frac{\partial z}{\partial y} = nx-my$

$\frac{dx}{ly-nz} = \frac{dy}{mz-lx} = \frac{dz}{nx-my}$

$\{\frac{z}{n}dx + \frac{1}{}\}$

$\frac{m\,dx + n\,dy + l\,dz}{m(ly-nz)+n(mz-lx)+l(nx-my)} = \gamma$

$d(mx+ny+lz) = 0$

$mx+ny+lz = c_1$

$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(ly-nz)+y(mz-lx)+z(nx-my)} = \gamma$

$x^2+y^2+z^2 = c_2$

$F(mx+ny+lz,\ x^2+y^2+z^2) = 0.$

№3 $xy\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0$ $\begin{matrix} xy=1 \\ u=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x=t \quad y=\frac{1}{t} \\ u=1 \end{matrix}$

Решение:

$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{yu} = -\frac{du}{xy}$

$1)\ dx = -du \Rightarrow x+u = c_1 \Rightarrow u = c_1 - x$

$$\frac{dy}{y(c_1-x)}=\frac{dx}{xy}$$

Это все ошибка! С глаз долой — из сердца вон!

$$dy=dx\frac{(c_1-x)}{x}$$

$$dy+\left(1-\frac{c_1}{x}\right)dx=0$$

$$y+x-c_1\ln x=c_2;$$

$$y+x-(x+u)\ln x=c_2$$

$$\frac{dy}{yu}=-\frac{du}{xy}$$

$$\cancel{xy}\,dy=-u\,du;$$

$$\frac{u^2}{2}+xy=c_2$$

$$\frac{y\,dx+x\,dy}{2xyu}=-\frac{du}{xy}$$

$$d(xy)=-2u\,dy$$

$$xy+u^2=c_2$$

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{yu};$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\frac{y}{x}=c_1$$

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=c_1\\ \frac{u^2}{2}+xy=c_2\end{cases}\qquad \begin{aligned}u&=1\\ x&=t\\ y&=\frac{1}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{t^2}=c_1\\ \frac{1}{2}+1=c_2\end{cases}\Rightarrow c_2=2\Rightarrow u^2=2-xy.$$

Ответ: $u^2=+2-xy$.

Training: 1) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$ $\qquad u\big|_{z=0}=x^2+y^2$

Решение уравнений типа:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=?$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases}$$

1-й способ.
Исключение переменной.

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=a_{11}\dot{x}_1+a_{12}\dot{x}_2\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases}$$

Тогда из исходной системы $x_2(x_1,\dot{x}_1)$, а из полученной $\dot{x}_2(\dot{x}_1,\ddot{x}_1)$

В результате имеем уравнение второго порядка относительно x_1

$$x_2 = \frac{\dot{x}_1 - a_{11}x_1}{a_{12}}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\ddot{x}_1 - a_{11}\dot{x}_1}{a_{12}}$$

$$\frac{\ddot{x}_1 - a_{11}\dot{x}_1}{a_{12}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}\cdot(\dot{x}_1 - a_{11}x_1) + a_{21}x_1$$

$$\ddot{x}_1 - a_{11}\dot{x}_1 = a_{22}\dot{x}_1 - a_{11}a_{22}x_1 + a_{21}a_{12}x_1;$$

$$\ddot{x}_1 - trA\,\dot{x}_1 + detA = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - trA\,\dot{x}_1 + detA = 0 \\ x_2 = \dfrac{\dot{x}_1 - a_{11}x_1}{a_{12}} \end{cases}$$

№1, 2, 3 $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

1) $\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + 12 = 0; \quad \lambda^2 + \lambda - 12 = 0;$

$D = 1 + 48 = 49 \Rightarrow \sqrt{D} = 7$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = 3; -4$

$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t}$

$x_2 = \frac{3c_1e^{3t} - 4c_2e^{-4t} - 2c_1e^{3t} - 2c_2e^{-4t}}{1};$

$x_2 = c_1 e^{3t} - 6c_2 e^{-4t}$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t} \\ x_2 = c_1 e^{3t} - 6c_2 e^{-4t} \end{cases}$$

2) $\ddot{x}_1 + 10\dot{x}_1 + 29 = 0; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0;$

$D = 100 - 29\cdot 4 = -16;$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$

$x_1 = c_1e^{5x}\cos 2x + c_2e^{5x}\sin 2x = e^{5x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

$x_2 = 5e^{5x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + 2e^{5x}(c_2\cos 2x - c_1\sin 2x) - 3e^{5x}\cdot$

$\cdot(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) / -2 =$

$= -e^{5x}\{\cos 2x(c_1 + c_2) + \sin 2x(c_1 - c_2)\}.$

$$\begin{cases} x_1 = e^{5x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) \\ x_2 = -e^{5x}[\cos 2x\cdot(2c_2+c_1) + \sin 2x(2c_1-c_2)] \end{cases}$$

3) $\ddot{x}_1 - 8\dot{x}_1 + 16 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$D = 0$

$\lambda_{1,2} = +4$

$x_1 = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}$

$$x_2 = \frac{4c_1e^{4t} + 4c_2te^{4t} + c_2e^{4t} - 2c_1e^{4t} - 2c_2te^{-4t}}{-1} =$$

$$= e^{4t}(-(2c_1+c_2) - 2c_2t)$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1e^{4t} + c_2te^{4t} \\ x_2 = e^{+4t}(-(2c_1+c_2) - 2c_2t) \end{cases}$$

2-й способ.
(матричный)

$$\left| \begin{matrix} A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{X}_1 \\ A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{X}_2 \end{matrix} \right| \quad \left| \begin{matrix} A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1 \\ A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 \end{matrix} \right|$$ Забыть! Забыть!

$\cancel{A\vec{x}_1}$ $A\vec{h}_1 = \lambda_1\vec{h}_1$

$A\vec{h}_2 = \lambda_2\vec{h}_2$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\vec{h}_1e^{\lambda_1t} + c_2\vec{h}_2e^{\lambda_2t} \qquad (\text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$ и матрица недиагон., то собств. вектор найти.

1) $\lambda_1 = -4$

$A\vec{h}_1 = \lambda_1\vec{h}_1$

$(A - \lambda_1E)\vec{h}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 6d_1 + d_2 = 0 \\ 6d_1 + d_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow d_1 = -\frac{d_2}{6} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3; \quad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -4; \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$

$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3-(5+2i) & -2 \\ 4 & 7-(5+2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2i & -2 \\ 4 & 2-2i \end{pmatrix}$

$\begin{cases} (-2-2i)d_1 - 2d_2 = 0 \\ 4d_1 + (2-2i)d_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1+i)d_1 + d_2 = 0 \\ 2d_1 + (1-i)d_2 = 0 \end{cases} \Big| (1-i) \quad \begin{cases} 2d_1 + (1-i)d_2 = 0 \\ 2d_1 + (1-i)d_2 = 0 \end{cases}$

$2d_1 + (1-i)d_2 = 0$

$2d_1 = (i-1)d_2$

$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -(i+1) \end{pmatrix} \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}$$

$$c_1 (Re\, \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}) + c_2 (Im\, \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \cdot e^{5t}(\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{pmatrix} e^{5t}\cos 2t + e^{5t} i \sin 2t \\ -e^{5t}(\cos 2t + i\sin 2t) - i(e^{5t}(\cos 2t + i \sin 2t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{5t}(\cos 2t + i \sin 2t) \\ e^{5t}\{(\sin 2t - \cos 2t) - i(\sin 2t + \cos 2t)\} \end{pmatrix}$$

$$c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = e^{5t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) \\ x_2 = e^{5t}\{(-c_1 + c_2)\sin 2t + (c_2 + c_1)\cos 2t\} \end{cases}$$

<u>Training</u>: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

15.04.2004г.

Семинар №8

№1 $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 5 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 13 \end{cases}$

$y^2 = x^2 - 5 \cancel{+\dot{x}} \Rightarrow$

$2x^2 - 18 = 0$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$x_1 = 3 \quad y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$
$x_2 = -3$

$M_1(3;2)$ $M_2(-3;2)$ $M_3(3;-2)$ $M_4(-3;-2)$

Исследование на устойчивость по первому приближени

$$A = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}A = 2x + 2y$

$\det A = 8xy$

$\lambda_{1,2} = x + y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 6xy}$

$M_1(3;2)$ $\lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{13 - 36} = 5 \pm \sqrt{23}\,i$

Неустойчивый фокус

$M_2(-3;2)$ $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{13+36} = \cancel{-1 \pm \sqrt{37}}\ 6; -8$

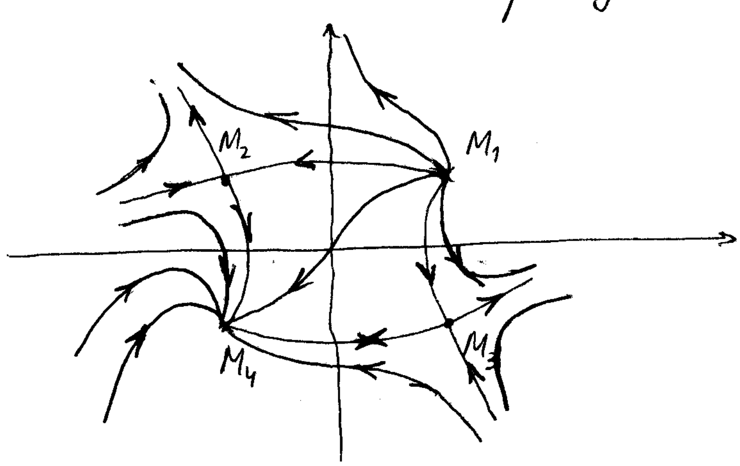
Седло

$M_3(3;-2)$ $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13+36} = \cancel{1 \pm \sqrt{37}}\ -6; 8$

Седло

$M_4(-3;-2)$ $\lambda_{1,2} = -5 \pm \sqrt{23}\,i$

Устойчивый фокус.



Кривые, проходящие через седла, называются сепаратрисами.

Устойчивые точки называют аттракторами, а неустойчивые – репеллерами.

Сепаратрисы разделяют области действия различных аттракторов.

Сами эти области называются бассейнами.

№2 $\begin{cases} \dot{x} = x(x+y-2) \\ \dot{y} = y(1-x) \end{cases}$

$y - yx = 0$

$x^2 + xy - 2 = 0 \Rightarrow xy = 2 - x^2 \Rightarrow y = \frac{2-x^2}{x}$

$\frac{2}{x} - x - 2 - x^2 = 0$

$x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$

$x($

$x = 1,\ y = 1$

$y = 0,\ x = 0$

$y = 0,\ x = 2$

$M_1(0;0)$ $M_2(2;0)$ $M_3(1;1)$

$A = \begin{pmatrix} 2x+y-2 & x \\ -y & 1-x \end{pmatrix}$

$tr = x+y+1$

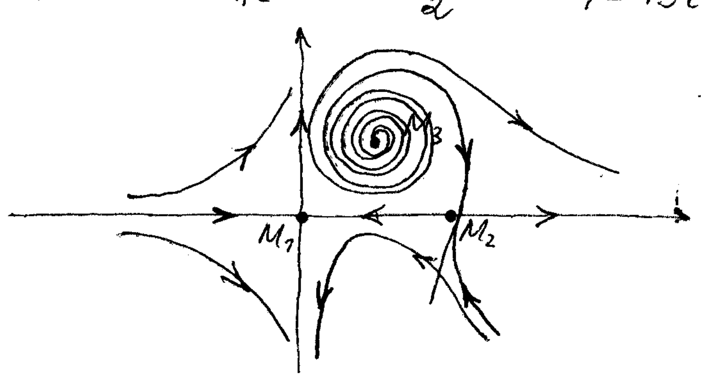
$det = (2x+y-2)(1-x) = 2x - 2x^2 + y - yx$

$\lambda_{1,2} = \frac{x+y+1 \pm \sqrt{(x+y+1)^2 - 4det}}{2}$

$M_1(0;0)$ $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}; = 0, 1$ Седло

$M_2(2;0)$ $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -1; 2$ Седло

$M_3(1;1)$ $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$ Фокус неустойчивый



№3 $\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = x^2+y^2-1 \end{cases}$

$-2xy = 0$

$x^2+y^2-1=0$

$x=0, \; y=\pm 1$

$y=0, \; x=\pm 1$

$M_1(0;1) \quad M_2(0;-1) \quad M_3(1;0) \quad M_4(-1;0)$

$A = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$

$trA = 0$

$det = -4y^2+4x^2$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i\sqrt{x^2+y^2}$

$M_1(0;1) \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2 \qquad$ Седло

$M_2(0;-1) \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2 \qquad$ Седло

$M_3(1;0) \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i \qquad$ Центр (формально)

$M_4(-1;0) \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i \qquad$ Центр (формально)

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2+y^2-1 \end{cases}$

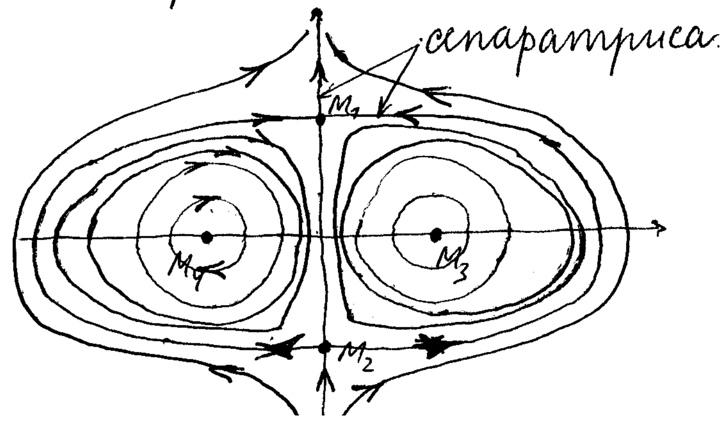
Делим I на II:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2-1}{-2xy}$

$(x^2+y^2-1)dx + 2xy\,dy = 0$

Ур-ние симметрично отн-но Ox и Oy (т.е. замен x на $-x$ и y на $-y$).

Т.о., т.к. спорные точки лежат на Ox, то в силу симметричности, это центры.



Модель Лотки(а) - Вольтерры(а)
(модель „хищник - жертва")

$$\underset{(\text{"кролик"})}{\dot{X}} = Ak_1X - k_2XY$$
$$\underset{(\text{"лиса"})}{\dot{Y}} = -Bk_3Y + k_2XY$$

$X(t)$ - числен. кроликов
$Y(t)$ - числен. лис

$$A + X \xrightarrow{k_1} 2X$$
$$X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y$$
$$Y + B \xrightarrow{k_3} B + E$$

A, B - const (реакторная модель)

$\cancel{X=0}$ $\quad X(Ak_1 - k_2Y)$
$\quad Y(k_2X - Bk_3)$

$x=0,\ y=0$ - седло

$y = +\dfrac{Ak_1}{k_2} \qquad x = \dfrac{Bk_3}{k_2}$

$$A = \begin{pmatrix} ak_1 - k_2y & -k_2x \\ k_2y & k_2x - bk_3 \end{pmatrix}$$

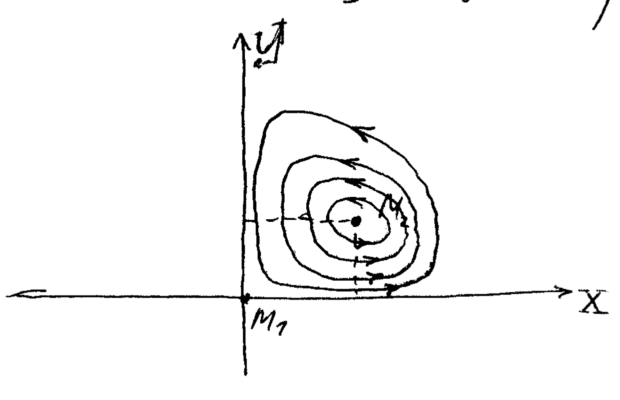
$$\left\{\begin{aligned} trA &= ak_1 - bk_3 + k_2(x-y) \\ \det A &= k_1k_2ax - k_1k_3ba - \cancel{k_2}k_2^2xy + k_2k_3by + k_2^2xy \end{aligned}\right.$$

$\lambda_{1,2} = ak_1 - bk_3$

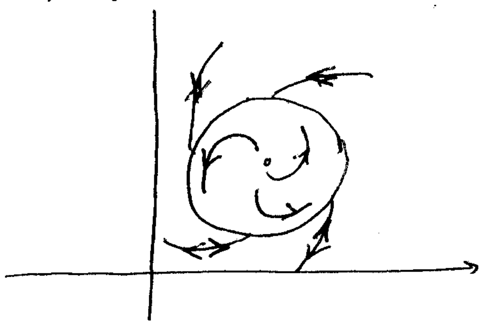
$$A = \begin{pmatrix} ak_1 - ak_1 & -Bk_3 \\ Ak_1 & Bk_3 - Bk_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -Bk_3 \\ Ak_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\cancel{\lambda_{1,2}}\quad \lambda^2 + ABk_1k_3 = 0$

$\lambda = \pm i\sqrt{ABk_1k_3}$ - центр (формально) (и реально).



Предельный цикл:



Предельный цикл (саму траекторию) тоже называют аттрактором.

$$\frac{dX}{dt} = Ak_1X - k_2XY$$
$$\frac{dY}{dt} = -Bk_3Y + k_2XY$$

Training $\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)(x-2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X(k_1A - k_2Y)}{Y(k_2X - k_3B)}$$

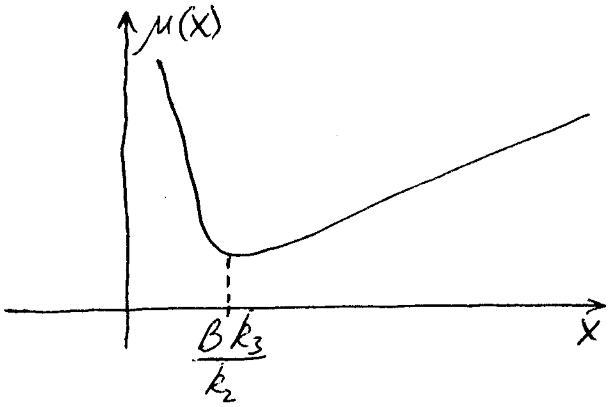
$$\frac{Y\,dY}{k_1A - k_2Y} = \frac{X\,dX}{k_2X - k_3B}$$

$$\frac{k_1A - k_2Y}{Y}dY = \frac{k_2X - k_3B}{X}dX;$$

$$k_1A\ln Y - k_2Y + k_3B\ln X - k_2X = C$$
$$k_1A\ln Y + k_3B\ln X - k_2(X+Y) = C$$

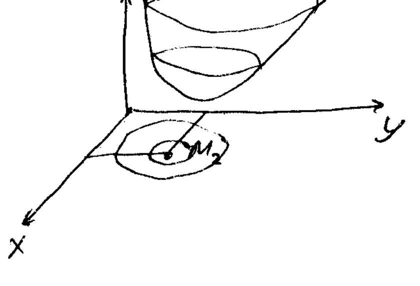
Т.о. это центр

$$\underbrace{-Bk_3\ln X + k_2X}_{\mu(X)} = \underbrace{Ak_1\ln Y - k_2Y}_{-\nu(Y)} + C$$



При малых X доминирует ln, при больших – линейная часть

Аналогично для $\nu(Y) - Y$



Т.о. это центр.

Семинар №9. 22.04.2004г.

Уравнения математической физики.

Уравнение Д'аламбера.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ где } a^2 \text{ - скорость} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Задача Коши для уравнения д'Аламбера.

Формула д'Аламбера для решения:

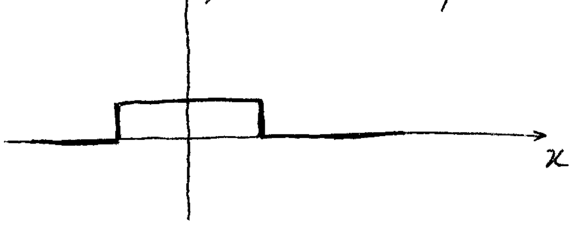
$$u(x,t) = \underbrace{\frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}}_{\text{изменение начального профиля волны}} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x)\,dx$$

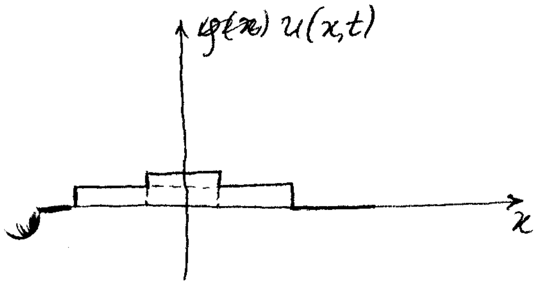
$0 \le t < +\infty$

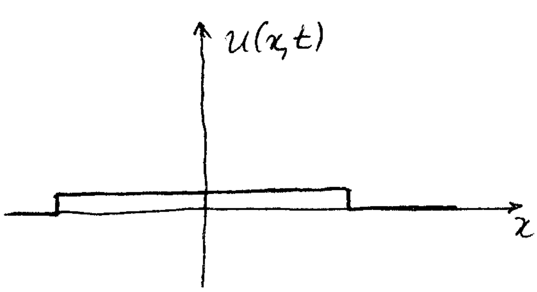
$-\infty < x < +\infty$

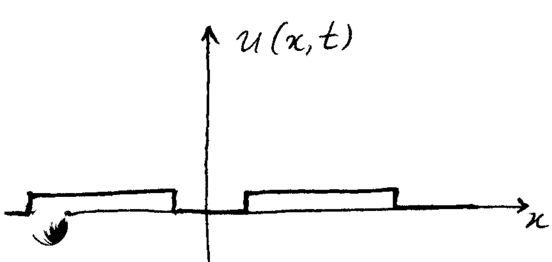
$t=0$

$\varphi(x)$ $\psi(x)=0$









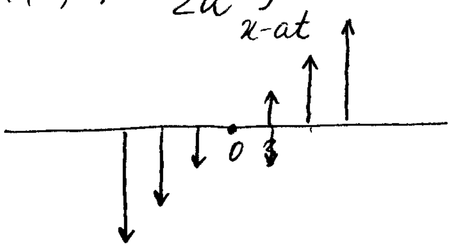
Изменение картины с ростом времени t.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = v_0 \end{cases}$$ (сообщение струне скорости)

$$u(x,t) = \frac{0+0}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0\, dx = \frac{1}{2a}\cdot v_0(x+at-x+at) = v_0 t$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = x \end{cases}$$ (поворот струны)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} x\, dx = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2}\left((x+at)^2-(x-at)^2\right) = \frac{1}{4a}\cdot 4xat = xt.$$



Физического смысла нет — скорость не ограничена.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \sin \alpha x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\sin\alpha(x-at)+\sin\alpha(x+at)}{2} = \frac{\sin(\alpha x - a^2 t)+\sin(\alpha x + a^2 t)}{2} =$$

$$= \sin \alpha x \cos a^2 t$$

Волна никуда не „бежит", а просто колеблется — т.н. стоячая волна.

29.04.2004г.

Семинар №10.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \varphi(x); \quad -\infty < x < +\infty; \quad 0 < t < +\infty \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\varphi(\xi)\, d\xi$$

Замена: $\xi - x = \eta$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2 t}} \varphi(x+\eta)\, d\eta$$

Задача 1: $a=1$; $u(x, t=0) = e^{-x^2}$

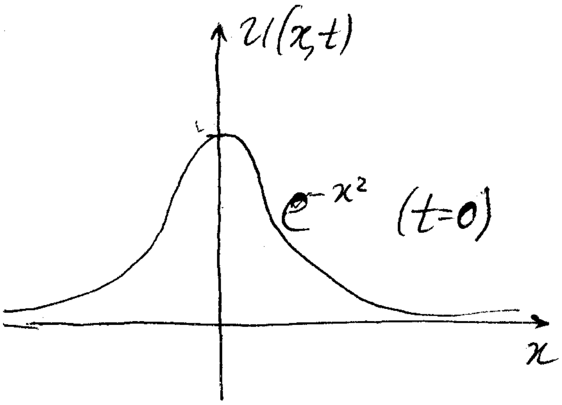
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2 t} - x^2 - 2x\eta - \eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4t} - (x+\eta)^2} d\eta =$$

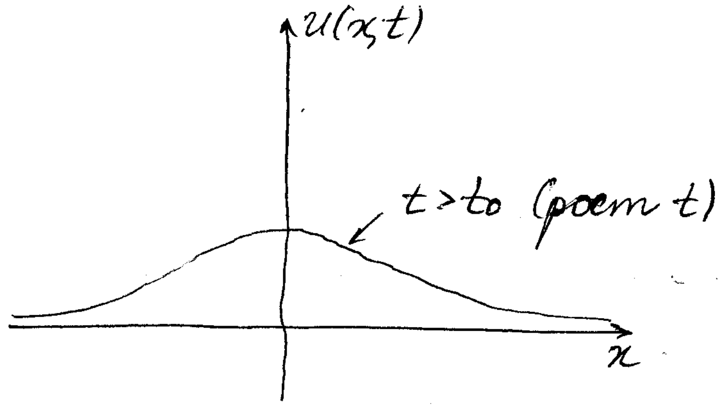
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4t}+1}}\, e^{\left(\frac{4x^2}{4\cdot\left(\frac{1}{4t}+1\right)} - 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi t}}{\sqrt{4t+1}}\, e^{\frac{x^2 4t}{4t+1} - x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{\frac{x^2 4t - x^2 4t - x^2}{4t+1}} = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t+1}\right).$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma\right)$$





Задача №2: $\varphi(x) = \delta(x)$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2 t}} \cdot \delta(\xi) d\xi / \delta(x+\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \underline{\underline{\rho = 4t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-\frac{x^2}{\rho}}$$

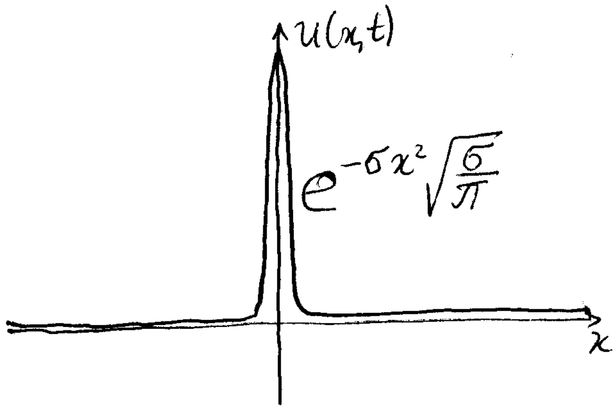
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-\frac{x^2}{\rho}} \xRightarrow[t\to 0]{\rho \to 0} \delta(x)$$

$$\rho = 4t$$

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-\frac{x^2}{\rho}} = \delta(x)}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sigma \qquad \boxed{\lim_{\sigma\to\infty} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} e^{-\sigma x^2} = \delta(x)}$$

Если σ большое, а $x^2 = 0$, то получаем всплеск:



С ростом σ график все плотнее прилегает к 0.
В пределе получаем δ-ф-цию, которая везде 0, в 0 бесконечность, а интеграл от нее равен 1.

6.05.2004г. Семинар № 11

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le t < \infty, \; 0 \le x \le l; \\ \alpha_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0; \\ \alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) + \beta_2 u(l,t) = 0; \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Метод разделения переменных.

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$X(x)\,\dot{T}(t) = a^2 X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X(x)}{X''(x)} = a^2 \frac{T(t)}{\dot{T}(t)} = \mu \equiv -\frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0 \text{ (при } \lambda \le 0 \text{ решение только тривиальное).}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ \dot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

$$T(t) = A e^{-\lambda a^2 t}$$

$$T(t)\left(\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0)\right) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0 \quad (T(t) \ne 0), \text{ аналогично} \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \longrightarrow \{\lambda_n\},\; n = 1, \dots, \infty \end{cases}$$

– бесконечный набор собств. значений.

∟ задача Штурма-Лиувилля.

Эта задача на собственные ф-ции и зн-ния оператора.

$\lambda_n \longrightarrow X_n(x) \neq 0$

$(X_n, X_m) = \int_0^l X_n(x) X_m(x)\,dx = \delta_{mn}$ (ортонормир.)

$(X_n, X_m) = \int_0^l X_n(x) X_m(x)\,dx = \delta_{mn} \|X_n\|^2$ (ортогон.)

$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, $T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t}$

$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n A_n X_n(x) e^{-\lambda_n a^2 t}$ – это общее решение.

$u(x,0) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n A_n X_n(x) = \varphi(x)$

$\Big|\ \varphi = \sum_n A_n X_n$

$(X_m, \varphi) = A_m \|X_m\|^2 \Rightarrow A_m = \dfrac{(X_m, \varphi)}{\|X_m\|^2} = \dfrac{\int_0^l X_m(x)\varphi(x)\,dx}{\int_0^l X_m^2(x)\,dx}$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_n A_n X_n(x) e^{-\lambda_n a^2 t}, \text{ где } A_n = \frac{(X_n, \varphi)}{\|X_n\|^2}}$$

Полное решение задачи.

Пример 1: $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \lambda\right) X(x) = 0$

$\alpha_1, \alpha_2 = 0$; $\beta_1, \beta_2 \neq 0$

a) $X(0) = X(l) = 0$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$x^2 + \lambda = 0$; $x = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$X_1(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t} = c_1 \cos\sqrt{\lambda} x + c_2 \sin\sqrt{\lambda} x$

$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda} x + c_2 \sin\sqrt{\lambda} x$

$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$X(l) = c_2 \sin l\sqrt{\lambda} = 0$, $c_2 \neq 0 \Rightarrow l\sqrt{\lambda} = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$

$\lambda = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$ – это с.з.

$X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l} x$

$\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2\dfrac{\pi n}{l} x\,dx = \int_0^l \dfrac{1 - \cos\frac{2\pi n}{l} x}{2}\,dx = \int_0^l \dfrac{1}{2}\,dx - \dfrac{1}{2}\int_0^l \cos\dfrac{2\pi n}{l} x\, d\dfrac{2\pi n}{l} x \cdot \dfrac{l}{2\pi n} =$

$= \dfrac{l}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{l}{2\pi n} \cdot \left(\sin\dfrac{2\pi n}{l} x\right)\Big|_0^l = \dfrac{l}{2}.$

б) $X'(0) = X'(\ell) = 0$

$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = 0,\ c_1 \neq 0$

$X'(\ell) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0 \Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2,\ n = 1, 2, \dots$

$X_n(x) = \cos\frac{\pi n}{\ell}x$

$\|X_n\|^2 = \frac{\ell}{2}.\ ,\ \|X_n(0)\|^2 = \ell$

в) $X(0) = X'(\ell) = 0$

$X(x) = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x$

$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 \neq 0$

$X'(\ell) = c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\ell = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell = \left\{\frac{\pi n}{2}\right\}\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0, 1, 2, \dots$

$\lambda = \frac{\pi^2(n+\frac{1}{2})^2}{\ell^2} = \left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{\ell}\right)^2$

$X_n(x) = \sin\frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{\ell}x$

$\|X_n\|^2 = \int_0^\ell \sin^2\frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{\ell}x\,dx = \int_0^\ell \frac{1+\cos\frac{\pi(2n+1)}{\ell}}{2}dx = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2\pi(2n+1)}\int_0^\ell \cos\frac{\pi(2n+1)}{\ell}x\,d\frac{\pi(2n+1)}{\ell}$

$= \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2\pi(n+1)}\left(\sin\frac{\pi(2n+1)}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell = \frac{\ell}{2}$

$\|X_n\|^2 = \frac{\ell}{2}.$

Пример 2:

а) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \varphi(x) = \sin\frac{9\pi}{\ell}x \cdot \frac{1}{137} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \end{cases}$

$A_9 = \frac{1}{137}$

$u(x,t) = \sum_n A_n X_n(x) e^{-\lambda_n a^2 t}$

$u(x,t) = \frac{1}{137} e^{-(9\pi/\ell)^2 a^2 t}\sin\frac{9\pi}{\ell}x$

б) $4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x$

$\varphi(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi}{\ell}x + \frac{3}{4}\sin\frac{\pi x}{\ell}$

$u(x,t) = \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{\ell}x\,e^{-(\frac{\pi a}{\ell})^2 t} - \frac{1}{4}\sin\frac{3\pi}{\ell}x\,e^{-(\frac{3\pi a}{\ell})^2 t}$