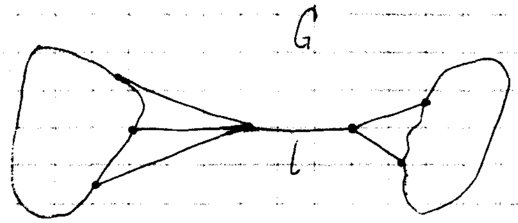
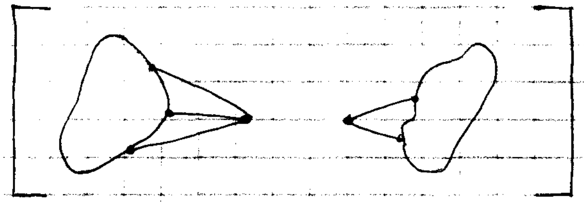
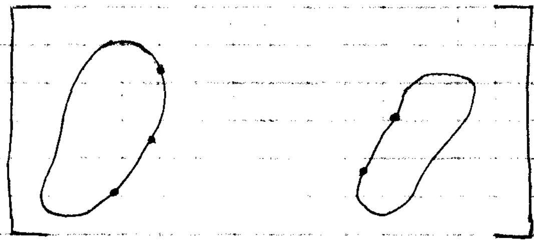
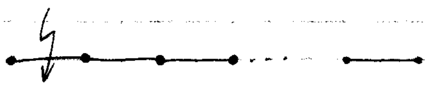


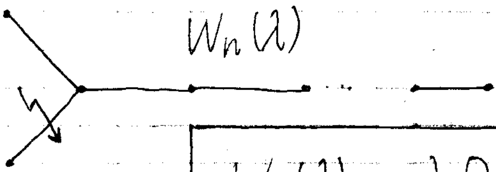
$G - l$:  (малая ампутация)

$G \ominus l$:  (большая ампутация)

Пример. Линейные цепочки.

 n вершин

$$\boxed{D_n(\lambda) = \lambda \cdot D_{n-1}(\lambda) - D_{n-2}(\lambda)}$$



n вершин

$$\boxed{W_n(\lambda) = \lambda D_{n-1}(\lambda) - \lambda D_{n-3}(\lambda)}$$

29.04.2004.
§

Решаем задачу Коши для ~~Пуассона (урав.~~ уравнения теплопроводности (ф-ла Пуассона):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \end{cases} \quad /задача/$$

Требуется ограниченность решения:
$u(t,x) \le M$ ($M>0$). Если отказаться от ~~решени~~ ограниченности, то решение может стать неоднозначным. Общее решение запишется в виде:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t + i\lambda x} d\lambda$$ (можно выполнить проверку)

Потребуем удовлетворения нач. усл.:

$$\varphi(x) = u(0,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad A(\lambda) - ?$$

(преобразование Фурье). Применяя обратное преобразование, получим ф-цию $A(\lambda)$:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi.$$

В итоге получим ф-лу Пуассона:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp(-\lambda^2 a^2 t + i\lambda(x-\xi))\, d\xi\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda^2 a^2 t + i\lambda(x-\xi)\, d\lambda \right] \varphi(\xi)\, d\xi$$

Можно вычислить интеграл в явном виде (ф-ция Грина):

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda^2 a^2 t + i\lambda(x-\xi))\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right), \text{ тогда:}$$

$$\boxed{u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi}$$ ф-ла Пуассона

Замечание.

1) Для того, чтобы применить к $A(\lambda)$ Fourier-преобразование, необходимо: $A \in \mathbb{L}_2$, т.е. $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 d\lambda$.

2) Для того, чтобы менять порядок интегрирования, необходима равномерная сходимость интегралов.

3) Вообще, очень сложно гарантировать существование решения в при полученных выкладках. Необходима проверка.

[Taylor: $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{t}}$

Проверка:

1. $t > 0$
2. G'_t
3. G'_x
4. G''_{xx}
5. Доказать равномерную сходимость интегралов по производным; сравнить.

Нужно трижды доказывать равномерную сходимость.

6. Проверить выполнение начального условия:

$$\lim_{t\to+0} u(t,x) = \varphi(x)$$

(доказать равномерную сходимость $\int = u$)

7. Доказать ограниченность решения:

а) $\varphi(x)$ огранич.

$\Downarrow$

б) $u(x)$ огранич.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x).$$

Для решения использовать принцип суперпозиции:

1) неоднородное уравнение с однородной задачей:

$$u_2(t,x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \quad \text{(проверка!!)}$$

2) однородное уравнение с неоднородной задачей: $u_1(t,x)$

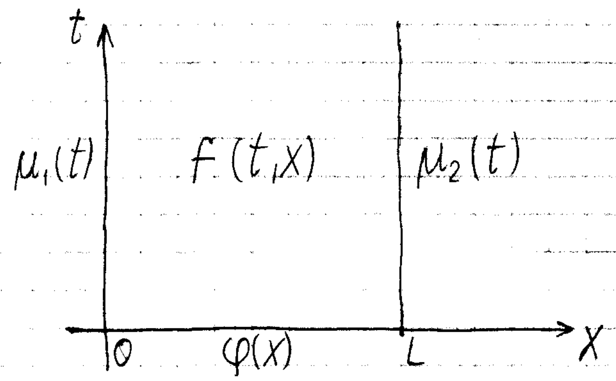
Общее решение $u(t,x) = u_1 + u_2$.

Рассмотрим задачу на полуограниченной прямой: продолжим φ нечетным образом:

$$\psi = \begin{cases} \varphi, & x \geqslant 0 \\ -\varphi, & x < 0 \end{cases}.$$ Далее: см. выше.

Если на границе задана производная, то её продолжают четным образом.

Рассмотрим краевую задачу. Решают ее при любом типе уравнений реш методом Фурье. (см.)



Можно (мин. случай) сделать замену переменных (мин.) т. о., что:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(t,x) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Задачу эту решают так:

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int \ldots \qquad (\text{известно})$$

v будем искать в виде:

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(t) \cos 2\pi k x + \beta_k(t) \sin 2\pi k x$$

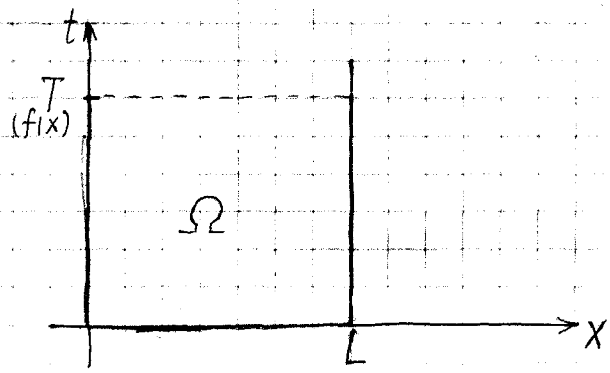
далее подставляем в уравнение, находим для $\forall k$ систему ДУ 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \cos - & \Big\{ \\ \sin - & \Big\{ \end{aligned}$$

Единственность решения

Теорема. Принцип ~~Максвелла~~ максимума.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \\ |u(t,x)| \leq M \\ \begin{cases} u(t,0) = \mu_1(t) \\ u(t,L) = \mu_2(t) \end{cases} \end{cases}$$



Либо решение задачи $u(t,x)$ есть Const в Ω, либо максимальные и минимальные значения $u(t,x)$ достигаются где-то на границе Γ.

■ Док-во:

Предположим:

$M \equiv \max\limits_{\Gamma} u(t,x)$; $\exists (t_0; x_0) \in \Omega$: $u(t_0, x_0) = M + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Введем вспомогательную ф-цию:

$v(t,x) = u + k(t_0 - t)$. Тогда:

$v(t_0; x_0) = u(t_0; x_0) = M + \varepsilon$;

$k(t_0 - t) \leq k \cdot T \underset{\text{подберем } k}{<} \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \left(0 < k < \frac{\varepsilon}{2T} \right)$.

$v|_\Gamma = u|_\Gamma + k(t_0 - t)|_\Gamma \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists (t_1, x_1)$: $v(t_1, x_1) \geq v(t_0, x_0) = M + \varepsilon$

$(t_1, x_1) \in \Omega$ (не Γ).

Отсюда: $u_{xx} = v_{xx} \leq 0$; $\underset{=0}{u_t}(t_1, x_1) = \underset{=0}{v_t}(t_1, x_1) + k > 0$

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(t_1, x_1)} > 0$,

$a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(t_1, x_1)} \le 0$ (что и доказывает теорему). ■

(min: $w \equiv -u$).

Отсюда следует единственность решения задачи:

$u = u_2 - u_1$,

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{<нулевые н.у.>} \end{cases}$, по ~~т. единственности~~ принципу максимума,

$u \equiv 0$ ($u|_\Gamma = 0$), (следствие 1 – т. единственности

$(u_1 \equiv u_2)$

Следствие 2. Допустим, есть 2 решения 2-х задачи: u_1, u_2, и $u_1|_\Gamma \le u_2|_\Gamma$ (можно всегда проверить по данным задачи. Тогда в Ω $u_1 \le u_2$.

$v \equiv u_2 - u_1$, $v|_\Gamma \geqslant 0$, поэтому в Ω $u_2 - u_1 \equiv v \geqslant 0$.

Следствие 3. Если $u_1|_\Gamma \le u|_\Gamma \le u_2|_\Gamma$ (3 задачи). Тогда в Ω: $u_1 \le u \le u_2$.

Можно получать мажорантные оценки для u – решения.

Следствие 4. Если $|u_1 - u_2|\big|_\Gamma \leqslant \varepsilon$. Тогда: в Ω: $|u_1 - u_2|\big|_\Gamma \le \varepsilon$.

$(u_2 - \varepsilon \le u_1 \le u_2 + \varepsilon)\big|_\Gamma$

Следствие. Непрерывная зависимость решения от начальных данных.
Если начальные данные на границе мало отличаются, то и решения в Ω мало отличаются.

Теорема помогает находить приближенные решения.

Обратимся к вопросу единственности решения задачи Cauchy.

$\forall\, u \equiv u_1 - u_2$ — удовл. урав. теплопр. и нулевым нач. усл., и огранич.: $|u| \le 2M$. Рассмотрим область: $|x| \le L$. Введем вспомогательную ф-цию:

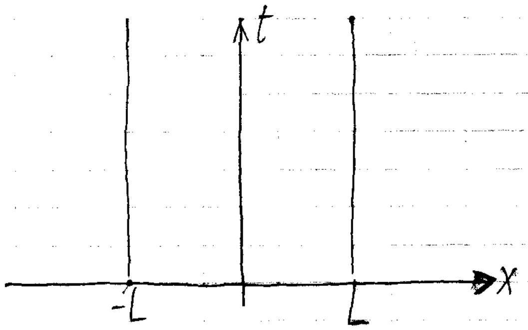
$$V(t,x) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$ — удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \equiv a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$, V непрерывна по t, x.

Далее, $V(t,x) \ge |v(0,x)|$, $v(0,x) \equiv \varphi - \varphi \equiv 0$.

$$V(\pm L, t) \ge \frac{4M}{L^2}\left(\frac{L^2}{2} + a^2 t\right) \ge \frac{4M}{L^2}\cdot\frac{L^2}{2} = 2M \ge |v(t, \pm L)|$$

граница.



Поэтому $V|_\Gamma \geq |v||_\Gamma$, и в Ω $V \geq |v|$

$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right) \leq v(t,x) \leq \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right)$ в Ω, и

$v(t,x) \equiv 0 = u_1 - u_2$, ч.т.д.

$(L \to \infty)$ $\forall L$.

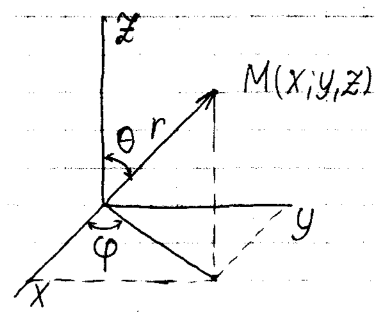
Эллиптические уравнения

electromagnetic

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\mathbb{R}^3), \ (x,y,z) \in \Omega, \\ u_\Gamma = \varphi \end{cases}$$

в сферических координатах:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \, \cancel{\sin} \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$



$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

в цилиндрических координатах:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

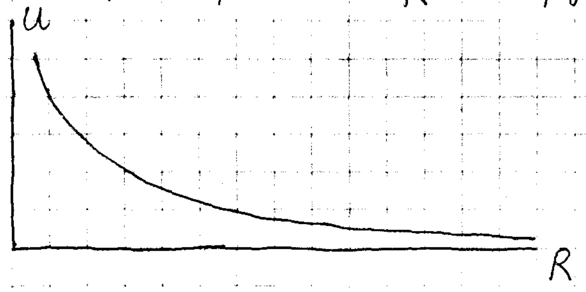
$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{\rho}\, r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Если, например, решение сферически симметрично, то:

$$\Delta u = \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = 0$$

$$u = c_1 \cdot \frac{1}{r} + c_2 \quad (\text{общий вид решения};\ r \equiv |\underline{r}|);$$

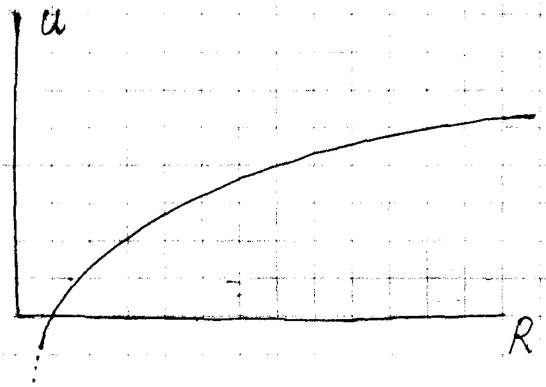
например: $u = \frac{1}{R}$ (фундаментальное реш-е)



В цилиндрических координатах фундаментальное решение:

$$u = \ln R$$

(общее: $c_1 \ln\rho + c_2$).



Связь решения уравнения Лапласа с аналитическими ф-циями:

$$f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y) \ \text{— ан. в}\ \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{в}\ \Omega$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Формула Остроградского:

$$\vec{A}(x;y;z) = \{P(x;y;z);\ Q(x;y;z);\ R(x;y;z)\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{A}\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{\equiv dV \equiv d\tau} = \iint\limits_{\Sigma} A_n\,d\sigma$$

$$\operatorname{div}\vec{A} \equiv \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$A_n \equiv \vec{A}\cdot\vec{n} \equiv (\vec{A},\vec{n}) \equiv \frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cdot\cos\gamma.$$

$$\vec{n} \equiv \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g(x;y;z) \equiv \left\{\frac{\partial g}{\partial x};\ \frac{\partial g}{\partial y};\ \frac{\partial g}{\partial z}\right\} = \vec{\nabla} g$$

Предп., что P, Q, R – непр. дифф. в Ω, тогда верна ф-ла Остроградского.

Свойства решений

$$P \equiv u\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q \equiv u\frac{\partial v}{\partial y},\quad R \equiv u\frac{\partial v}{\partial z}\quad (u, v \text{ – ф-ции}):$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\left\{u\cdot\Delta v + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right\}dV =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v)\,dV = \iint\limits_{\forall\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,d\sigma \quad \text{(1-я ф-ла Грина).}$$

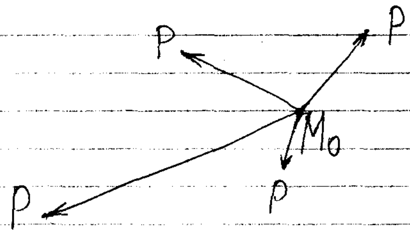
$$\frac{\partial v}{\partial \vec{s}} \equiv \vec{\nabla}v\cdot\vec{s},\quad \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla}v\cdot\vec{n}$$

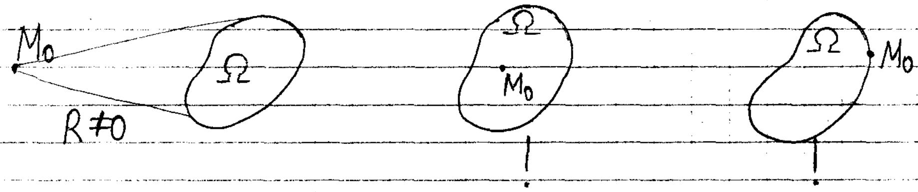
Далее,

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,d\tau - \iiint\limits_{\Omega}\vec{\nabla}u\vec{\nabla}v\,d\tau$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\cdot\Delta v - v\cdot\Delta u)\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma}\left\{u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\cdot\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right\}d\sigma \quad \text{(вторая ф-ла Грина)}$$

Положим во 2-й ф-ле Грина $u \equiv \frac{1}{R_{M_0P}}$





Семинар

I Уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \qquad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right) \varphi(\xi)\, d\xi$$

$-\infty < x < +\infty$

$0 \leq t < +\infty$

Замена: $\eta = \xi - x$, $\quad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4a^2t}\right) \varphi(x+\eta)\, d\eta$

Пример 1 $\varphi(x) = e^{-x^2}$ (н.у.)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} e^{-x^2} d\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}} e^{-(x+\eta)^2} d\eta =$$

Формула гауссовского интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2 - \beta x - \gamma)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{m}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\right) dx = \sqrt{\frac{\pi m}{\alpha}}\, e^{\frac{1}{m}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma\right)}$$

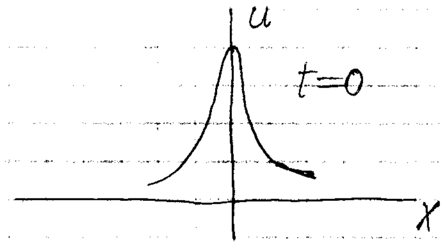
$\ominus \cancel{\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \cdot e^{-\frac{1}{4a^2t}} \int_{-\infty}^{+\infty}} \ominus \int$

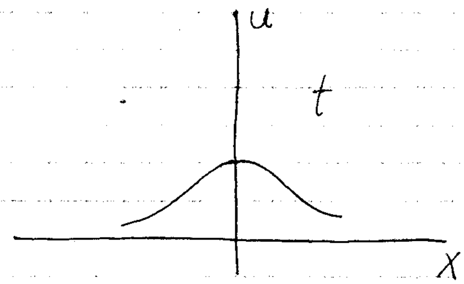
$$\ominus \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}} e^{-x^2-2\eta x-\eta^2} d\eta = \begin{bmatrix} \alpha = \frac{1}{4a^2t} - 1 \\ \beta = 2x \\ \gamma = -x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi \cdot 4a^2t}{-4a^2t+1}} \cdot e^{\frac{4x^2 \cdot 4a^2t}{4(1-4a^2t)} + x^2} = \sqrt{\frac{4\pi a^2 t}{1-4a^2t}} \cdot \exp\left(\frac{4a^2x^2t}{1-4a^2t} + x^2\right).$$

$\left(\text{Отв.: } (1+4t)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{x^2}{1+4t}}\right).$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} - x^2} \underset{a=1}{=}$$



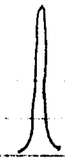


Пример 2.

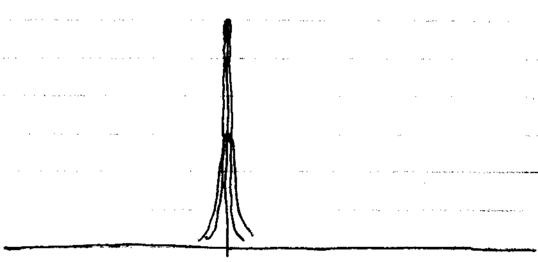
$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \delta(x) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}} \delta(x+\eta) d\eta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi p}} e^{-\frac{x^2}{p}} \xrightarrow{p \to 0} \delta(x) \quad (u(0,x) = \delta(x));$$

$$\boxed{\lim_{p \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi p}} e^{-\frac{x^2}{p}} = \delta(x) = \lim_{\sigma \to \infty} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} e^{-\sigma x^2}}$$



(приближение δ-ф-ции с помощью гауссовских).



Разностные уравнения

$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \ldots + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n = 0,\ a_0 \neq 0$
(разностное ур-е)

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$ (уравнения Фибоначчи)

Решение ищут в виде:

$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_k\lambda_k^n$ (общее решение: λ^n)

$\cancel{a_0\lambda^n + \ldots + a_k\lambda^n = 0}$

$\cancel{\lambda^n (a_0 + \ldots + a_k)}$

$a_0 \lambda^{n+k} + \ldots + a_k\lambda^n = \lambda^n (\underbrace{a_0\lambda^k + \ldots + a_k}_{\text{ср. с ДУ}}) = 0$

Но $\lambda = 0$ не подходит, т.к. оно может не удовлетворять н.у.

Собств. значения: $\lambda_1 \ldots \lambda_k$;

если все $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ различны, то общее решение:

$y_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n$.

в случае, если λ_j — кр. μ: μ решений:

$\lambda_j^n,\ n\lambda_j^n, \ldots, n^{\mu-1}\lambda_j^n$

в случае пары комплексно-сопряженных решений: $\lambda_j = \alpha + i\beta$, $\lambda_{j+1} = \alpha - i\beta$,

$c_j(\alpha + i\beta)^n + c_{j+1}(\alpha - i\beta)^n$, что можно представить по-другому:

> rsolve; — решение разностных уравнений.

$\alpha+i\beta = re^{i\varphi}$, $(\alpha+i\beta)^n = r^n e^{\pm in\varphi}$,

можно взять другие ЛК:

$r^n \cos n\varphi$, $r^n \sin n\varphi$

$c_j r^n \cos n\varphi$, $c_{j+1} r^n \sin n\varphi$

<u>Пример</u>. Числа Fibonazzi

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \\ \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \end{cases} \qquad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots$$

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$, $k=2$,

$a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1$

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, $D = 1+4 = 5$; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Общее решение: $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$; c_1, c_2 (из н.у.)?

$$\begin{cases} u_0 = c_1 + c_2 = 0 \\ u_1 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \quad c_2 = -c_1 \\ (1+\sqrt{5})c_1 + (1-\sqrt{5})c_2 = 2 \end{cases}$$

$(1+\sqrt{5})c_1 - (1-\sqrt{5})c_1 = 2$

$c_1 + \sqrt{5}c_1 - c_1 + \sqrt{5}c_1 = 2\sqrt{5}c_1 = 2$;

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\boxed{y^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \left(= \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right).$$

(ф-ла Бине).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\varphi$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n}}=\lim\frac{\frac12\lambda_1^n+\frac{\sqrt5}{2}\lambda_1^n-\frac12\lambda_2^n+\frac{\sqrt5}{2}\lambda_2^n}{\lambda_1^n-\lambda_2^n}=$$

$$\left[\begin{array}{l|l} \lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & \lambda_1^n-\lambda_2^n \\ \hline \lambda_1^{n+1}-\lambda_1\lambda_2^n & \lambda_1+ \\ -\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_2^{n+1} & \end{array}\right]$$

$$=\lim\frac{\lambda_1^n+\lambda_2^n}{\lambda_1^n-\lambda_2^n}\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{\sqrt5}{2}\lim\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n+2\lambda_2^n}{\lambda_1^n-\lambda_2^n}$$

$$\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^n-\lambda_2^n}\Big|\lambda_1^n=$$

$$\begin{cases} D_{n+2}=xD_{n-1}-D_{n-2} & \text{(линейные цепочки)}\\ D_1=x\\ D_2=x^2-1\end{cases}$$

$$D_n(2\cos\varphi)=\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{(гипотеза)}$$

Док-во:

$$D_{n+2}=2\cos\varphi\, D_{n-1}-D_{n-2},$$

$$\lambda^2-2\cos\varphi\cdot\lambda+1=0,$$

$$D=4\cos^2\varphi-4=4(\cos^2\varphi-1)$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\cos\varphi\pm2i\sin\varphi}{2}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi=e^{\pm i\varphi}$$

$$\begin{cases} D_n=c_1e^{in\varphi}+c_2e^{-in\varphi}\\ c_1e^{i\varphi}+c_2e^{-i\varphi}=x\\ c_1e^{2i\varphi}+c_2e^{-2i\varphi}=x^2-1\end{cases}$$

$$\cancel{(c_1+c_2)\cos\varphi=x}$$

$$\cancel{(c_1+c_2)\cos2\varphi=x^2-1}$$

$$D_0=xD_1-D_2=x^2-x^2+1=1;$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \quad , c_2 = 1 - c_1 \\ c_1 e^{i\varphi} + c_2 e^{-i\varphi} = x \end{cases}$$

$$c_1 e^{i\varphi} + (1 - c_1) e^{-i\varphi} = c_1 e^{i\varphi} - c_1 e^{i\varphi}$$

$$D_1 = x = 2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$D_2 \neq D$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 e^{i\varphi} + c_2 e^{-i\varphi} = x \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & e^{-i\varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-i\varphi} - x}{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}} = -\frac{e^{-i\varphi} - x}{2i\sin\varphi}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\varphi} & x \end{vmatrix}}{-2i\sin\varphi} = -\frac{x - e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}$$

Можно решать по-другому:

$$\begin{cases} D_1 = x = 2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \lambda_1 + \lambda_2 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 \\ D_0 = 1 = c_1 + c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} x & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{x - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{\lambda_1 - x}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$$

Еще проще: $\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ c_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$

$$D_n(2\cos\varphi) = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$, ч.т.д.

$$D_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi k}{n+1}$$

$\varphi \neq 0$, $k = 1, 2, \dots n$.

$$\boxed{x = 2\cos\varphi = 2\cos\frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1 \dots n}$$

Разностные уравнения

training

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & & 1 & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

TRAINING

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3\alpha+2\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 5 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$ (по посл. строчке)

Δ_n — ? — решить как разностное ур-е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2\operatorname{tg}x & \sin^2 x & 0 \\ 1/\cos^2 x & 2\operatorname{tg}x & \sin^2 x \\ 0 & 1/\cos^2 x & 2\operatorname{tg}x \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \Delta_n - \Delta_{n-1}, \quad c_1; c_2 - ?$$

$$\Delta_n = \cancel{3\alpha + 2\beta} \quad \cancel{\alpha\beta}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1;$$

$$y_n = c_1\lambda^n + nc_2\lambda^n$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 = c_1\lambda + c_2\lambda \\ \Delta_2 = 3 = c_1\lambda^2 + 2c_2\lambda^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{2}{\lambda} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{3}{\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta_n = n + 1}$$

<u>Еще пример</u>. $a, b, -a, -b, a, b, \dots$

$$\begin{cases} u_{n+2} = -u_n \\ u_0 = a, \\ u_1 = b \end{cases} \qquad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$u_n = ic_1 - ic_2 = e^{\frac{i\pi n}{2}} c_1 + e^{-\frac{i\pi n}{2}} c_2 =$$

$$= c_1 \cos\frac{\pi n}{2} + c_2 \sin\frac{\pi n}{2};$$

$$\begin{cases} c_1 = a \\ c_2 = b \end{cases} \Rightarrow u_n^* = a\cos\frac{\pi n}{2} + b\sin\frac{\pi n}{2}.$$