Решая квадратное уравнение (6'), получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}},$$

откуда можно различить три случая:

1. $\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Имеется два решения уравнения (6), и два ПИ для (6'): $\pm$

$$\begin{cases} \varphi(x;y) = \varkappa_1(x;y) \\ \psi(x;y) = \varkappa_2(x;y) \end{cases}$$

Тогда $\bar{a}_{11} = 0$, $\bar{a}_{22} = 0$, и (1) перейдет в:

$$\boxed{2\bar{a}_{12}\, u_{\xi\eta} = \tilde{F}}$$ (канонический вид).

Имеем уравнение „гиперболического типа".

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_\xi = u_\alpha \cdot \alpha_\xi + u_\beta \cdot \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta) \\ u_\eta = u_\alpha \alpha_\eta + u_\beta \beta_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)'_\eta = \frac{1}{4}\left[u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}\right]$$

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \hat{F}}$$

Семинар

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 5 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 13 \end{cases}$$ (нелинейная система).

Найдем точки покоя и применим процедуру линеаризации.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - 18 = 0,$$

$$y_{1,2} = \pm 3 \;;$$

$$x_{1,2}^2 = 14, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\cancel{14}} \,; 2$$

$M_1(3;\ \sqrt{\cancel{14}})$ 2

$M_2(3;\ -\sqrt{\cancel{14}})$ 2

$M_3(-3;\ \sqrt{\cancel{14}})$ 2

$M_4(-3;\ -\sqrt{\cancel{14}})$ 2

$M_1(3;\ \sqrt{14})$;

$$\begin{cases} x = x_1 + \xi \\ y = y_1 + \eta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{\xi} \cong (x^2-y^2-5)'_x\big|_{M_1} + (x^2-y^2-5)'_y\big|_{M_1} + o \\ \dot{y} = \dot{y}_1 + \dot{\eta} \cong (x^2+y^2-13)'_x\big|_{M_1} + (x^2+y^2-13)\big|_{M_1} + o \end{cases}$$

$$A_{linear} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \cong A_{linear} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{0}$$

$\boxed{M_1}$ $A|_{M_1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$;

$$\| A|_{M_1} - \lambda E \| = (6-\lambda)(4-\lambda) + 24 = \lambda^2 - 10\lambda + 48 = 0;$$

$$D = 100 - 192 = -92;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm i\sqrt{92}}{2}$$

(неуст. фокус)

$\boxed{M_2}$ $A|_{M_2} = \begin{pmatrix} 6 & +4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; $\| A|_{M_2} - \lambda E \| = (6-\lambda)(-4-\lambda) - 24 =$

$= +\lambda^2 - 2\lambda - 48 = 0$; $D = 4 + 192 = 196$;

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 14}{2} \quad \text{(седло)}$$

$\boxed{M_3}$ $A|_{M_3} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$; $\| A|_{M_3} - \lambda E \| = (-6-\lambda)(4-\lambda) + 24 =$

$= +\lambda^2 + 2\lambda + 24$; $\cancel{\sqrt{D} = 14}$

$$D = 4 - 192 = -188;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{|D|}}{2}, \quad \text{(уст. фокус)}.$$

$\boxed{M_4}$ $A|_{M_4} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$; $\| A|_{M_4} - \lambda E \| = (-6-\lambda)(-4-\lambda) + 24 =$

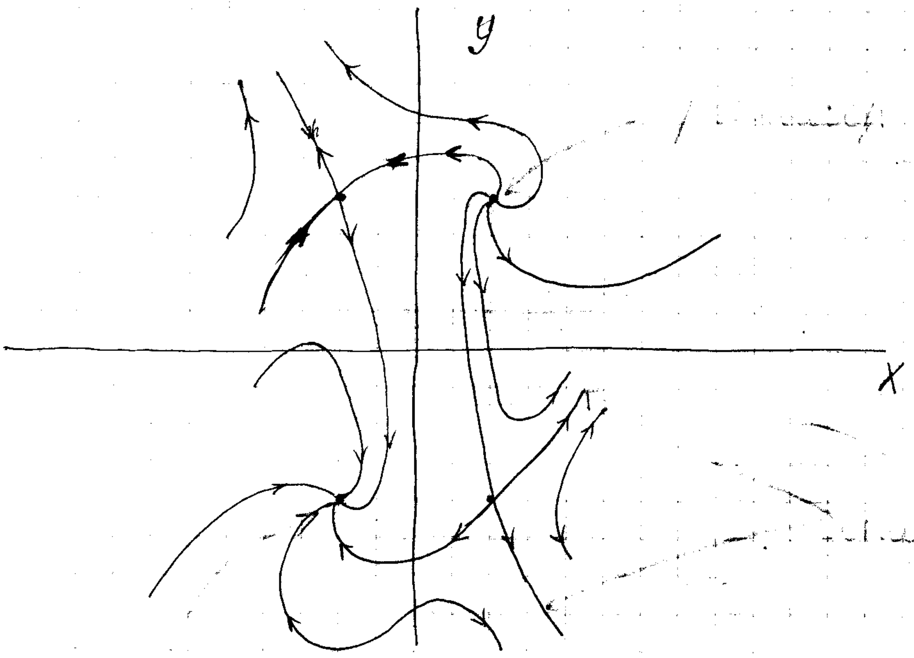
$= \lambda^2 + 10\lambda + 24 = 0$; $D = 100 - 192 = -92$;

$$\lambda_{1,2} = \frac{-10 \pm i\sqrt{92}}{2}, \quad \text{(уст. фокус)}$$

Отв.: $(-3;2)$; $(3;-2)$ – седло;

$(3;2)$ – неуст. фокус;

$(-3;-2)$ – уст. фокус.



Рассмотрим другую систему.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x+y-2) \\ \dot{y} = y(1-x) \end{cases}$$

Точки покоя:

$$\begin{cases} x(x+y-2)=0 \\ y(1-x)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+xy-2x=0 \\ y-xy=0 \end{cases} +$$

$$x^2+y-2x=0; \quad y=2x-x^2;$$

$$(2x-x^2)(1-x)=0;$$

$$x(2-x)(1-x)=0$$

$x_1 = 0,\ y_1 = 0$

$x_2 = 2,\ y_2 = 0$

$x_3 = 1,\ y_3 = 1$

$$A_{linear} = \begin{pmatrix} (2x+y-2) & x \\ -y & (1-x) \end{pmatrix}; \quad Tr = x+y-1;$$

$$Det =$$

$\boxed{M_1}$ $$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\|A-\lambda E\| = (\overset{-2}{-2}-\lambda)(\overset{1}{1}-\lambda) = \lambda^2+\lambda-2;$$

$$D = 1+8 = 9; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} \ - \text{(седло)}$$

$\boxed{M_2}$ $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \ \|A-\lambda E\| = (2-\lambda)(-1-\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -1 \quad \text{, (седло)}$$

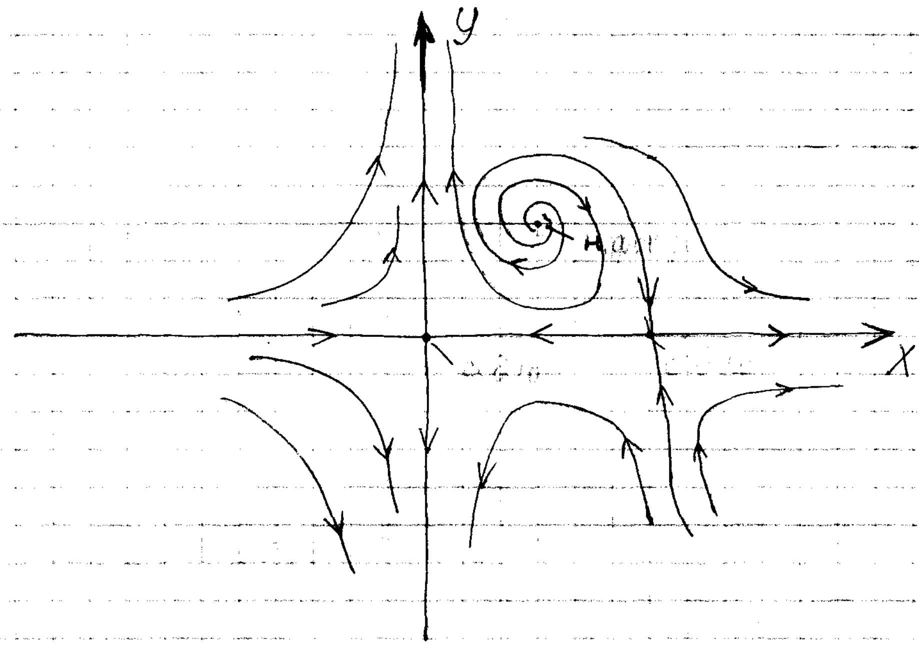
$\boxed{M_3}$ $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \|A-\lambda E\| = -\lambda(1-\lambda)+1 = \overset{\lambda^2+\lambda+1}{\cancel{-\lambda^2+\lambda+1}};$$

$$D = 1+4 = 5; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{-2} = \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$$

(седло)

$$D = 1-4 = -3; \quad \lambda_{1,2} = \frac{+1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

(неуст. фокус)



$$\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = x^2+y^2-1 \end{cases}$$

Т. покоя:

$$\begin{cases} 2xy=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad x=0 \quad \text{или} \; y=0$$

если $x=0 \quad y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm 1 \quad \left[\begin{array}{l} M_1(0;1) \\ M_2(0;-1) \end{array}\right.$

если $y=0 \quad x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \quad \left[\begin{array}{l} M_3(1;0) \\ M_4(-1;0) \end{array}\right.$

$$A_{linear} = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}; \quad Tr=0; \quad Det = 2(x^2-y^2)$$

$\boxed{M_1}$ $Det=-2$
$\boxed{M_2}$ $Det=-2$ } седло

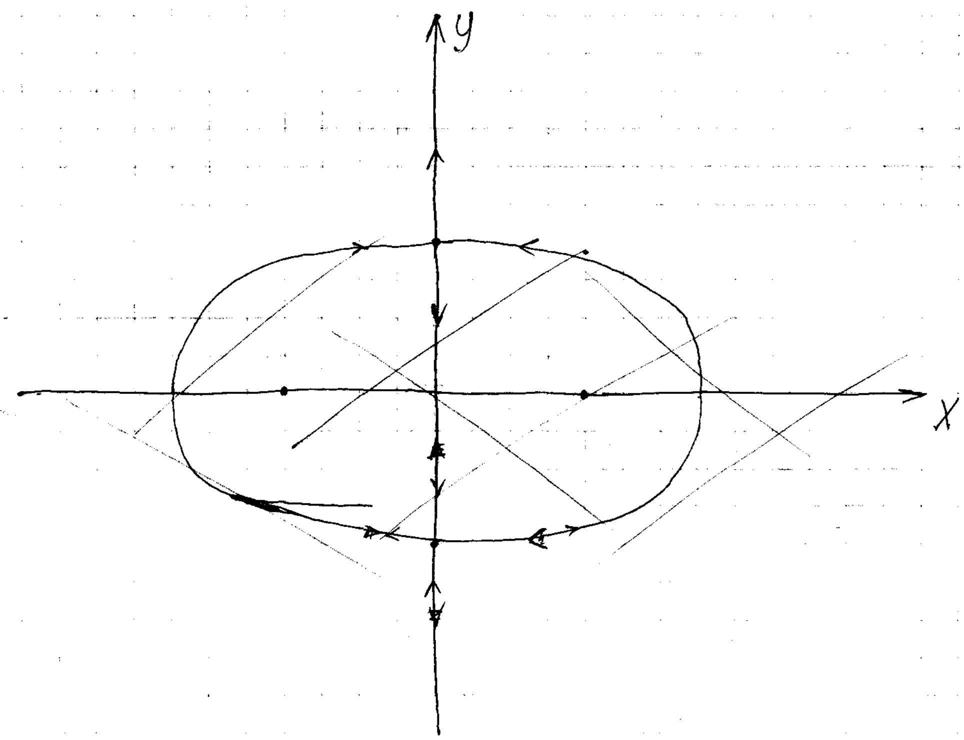
$\boxed{M_3}$ $Det=2$
$\boxed{M_{34}}$ $Det=2$ } центр: $\lambda^2+4=0$, $\lambda=\pm 2i$ (?!)

формально!

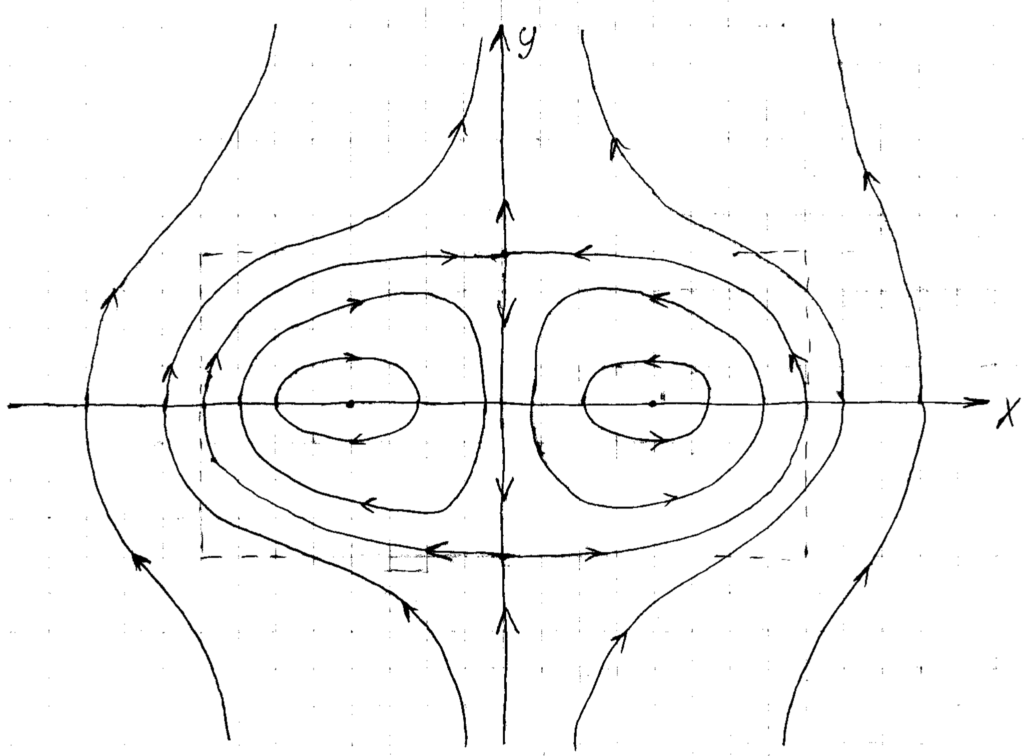
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2+y^2-1 \end{cases}$$

$(x^2+y^2-1)\,dx + 2xy\,dy = 0$ (урав. симметрично отн. осей $0x$ и $0y$), поэтому реально получаем центр.

! Внимание! Метод линеаризации дает эффект всегда, кроме случая



Сепаратрисы седла напр. вдоль соответствующих собственных векторов.



Модель Лотка-Вольтерра

Модель введена для описания взаимодействия хищника и жертвы (/ модель иммунитета).

x — жертва :
y — хищник :

$$\begin{cases} \dot{x} = \underline{Ak_1} x - k_2 xy \\ \dot{y} = -Bk_3 y + k_2 xy \end{cases}$$

Ср.: модель описывает также модель химической реакции:

$$\begin{cases} A + X \xrightarrow{k_1} 2X \\ X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y \\ Y + B \xrightarrow{k_3} B + E \end{cases}$$

Т. покоя:

$$\begin{cases} Ak_1 x - k_2 xy = 0 & \Rightarrow x\cdot(Ak_1 - k_2 y) = 0 \\ -Bk_3 y + k_2 xy = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\cancel{x}\ y = A\frac{k_1}{k_2} \Rightarrow x =$$

$$-Bk_3 \cdot \cancel{A} \cdot \frac{\cancel{k_1}}{\cancel{k_2}} + k_2 \cdot \cancel{A}\frac{\cancel{k_1}}{\cancel{k_2}} x = 0;$$

$$x = +B\frac{k_3}{k_2}$$

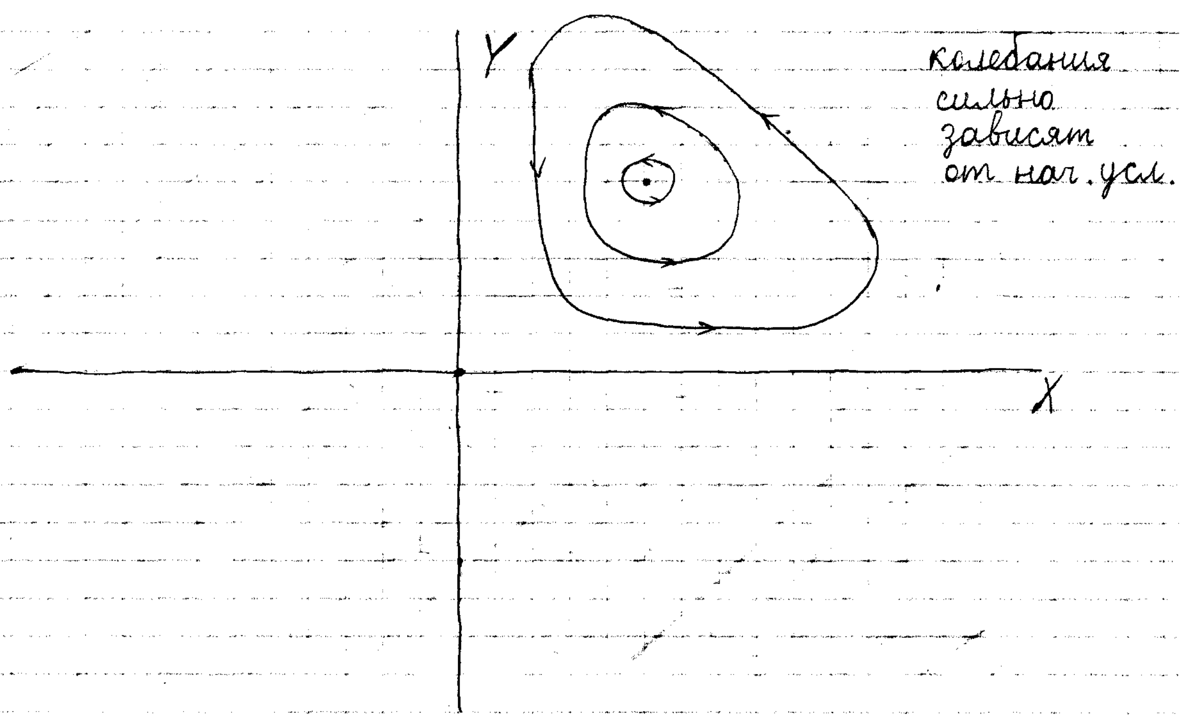
$M_1(0;0)$ — седло

$M_2\left(B\frac{k_3}{k_2}; A\frac{k_1}{k_2}\right)$

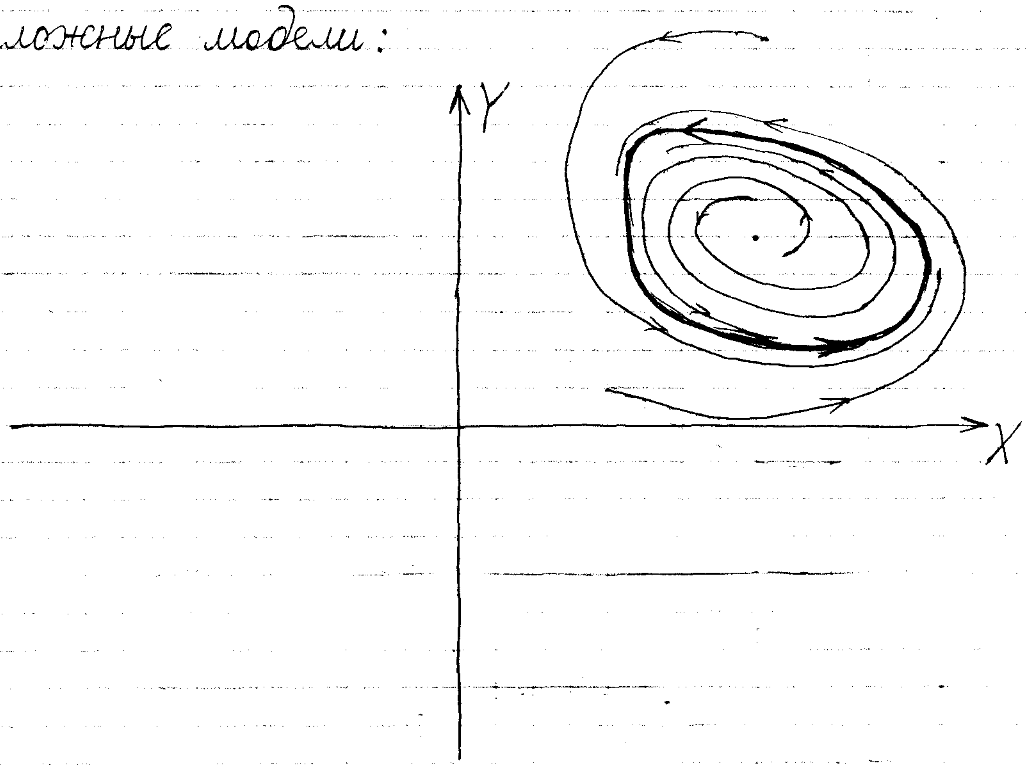
$$A\big|_{M_2} = \left.\begin{pmatrix} (Ak_1 - k_2 y)' & -k_2 y \\ k_2 y & (-Bk_3 + k_2 x) \end{pmatrix}\right|_{\left(B\frac{k_3}{k_2};\, A\frac{k_1}{k_2}\right)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \overset{-Bk_3}{\cancel{-Ak_1}} \\ Ak_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \left\|A\big|_{M_2} - \lambda E\right\| = \lambda^2 + \overset{+ABk_1k_3}{\cancel{2Ak_1}} = 0$$

$\lambda = \pm i\sqrt{ABk_1k_3}$ — центр (формально и реально). Необходимо дальнейшее исследование.



Эта модель не очень реалистична. Для описания реальных процессов необходимо использовать более сложные модели:



Докажем, что M_2 в нашей модели — действительно центр:

$$\cancel{\frac{dX}{dY} =}$$

$$\frac{dX}{dY} = \frac{X(Ak_1 - k_2 Y)}{Y(k_2 X - Bk_3)}$$

$$\frac{k_2 X - Bk_3}{X}\, dX = \frac{Ak_1 - k_2 Y}{Y}\, dY$$

$$\left(k_2 - \frac{Bk_3}{X}\right) dX = \left(\frac{Ak_1}{Y} - k_2\right) dY$$

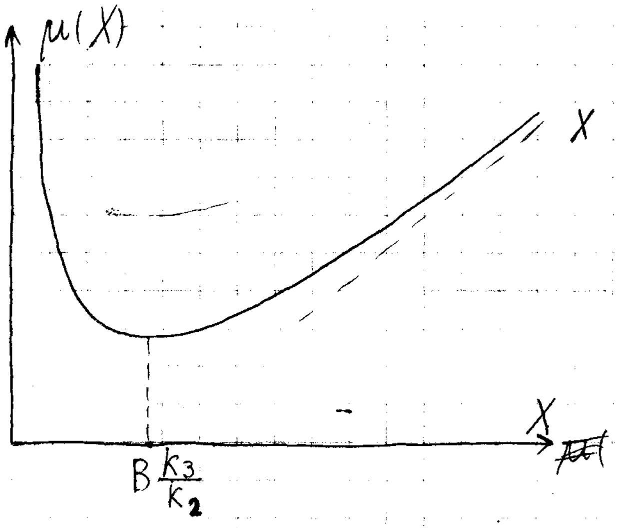
$$\overbrace{k_2 X - Bk_3 \ln X}^{\mu(X)} = \overbrace{Ak_1 \ln Y - k_2 Y}^{-\nu(Y)} + C$$

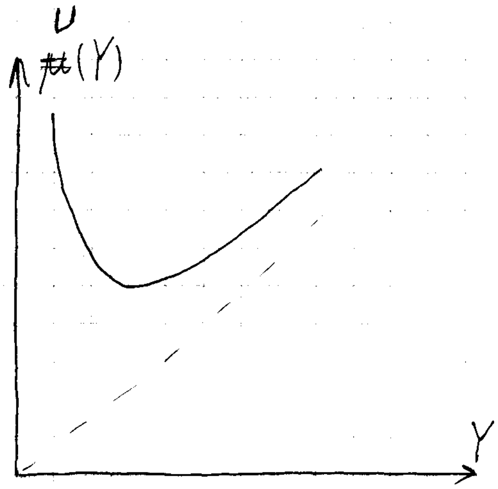
$$k_2(X+Y) = \ln\left(X^{k_3 B} Y^{k_1 A} \cdot C\right)$$

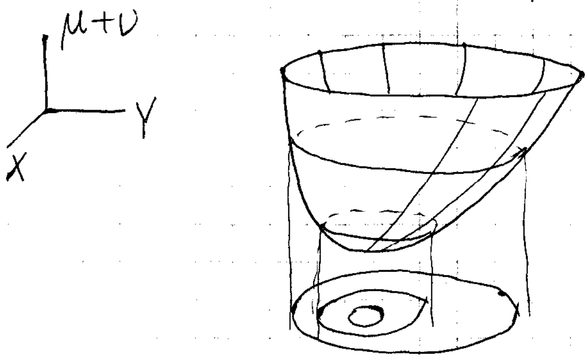
$$k_2(X+Y) - Bk_3 \ln X - Ak_1 \ln Y = C$$

$\boxed{\text{TRAINING}}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$







В этой области имеется два решения уравнения (6) {(6')}
$\exists$ два первых интеграла $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ тогда для замены

$\varphi(x,y) \equiv \varkappa_1 \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0$

$\psi(x,y) \equiv \varkappa_2 \Rightarrow \bar{a}_{22} = 0$ $\Rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = \widetilde{F}}$ это т.н. канонический вид

Сам тип уравнений называется гиперболическим.

Иногда делают замену:

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\xi+\eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$

Тогда $u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$

$u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$

$u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi} = \left[\frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)\right]'_\eta = \frac{1}{4}\left[u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}\right]$

По-другому гиперболический тип записывают в виде:

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \hat{F}}$$

.04.2004г.

Лекция №10

$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$

$D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$

$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}\, dy^2 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}$

$D > 0$: гиперб. тип

$u_{\xi\eta} = \widetilde{F}$; $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \hat{F}$

$D = 0$

Тогда будет только один первый интеграл

$\xi \equiv \varphi(x,y) \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0$ (по лемме)

$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y =$

$= (\sqrt{a_{11}}\, \xi_x + \sqrt{a_{22}}\, \xi_y)(\sqrt{a_{11}}\, \eta_x + \sqrt{a_{22}}\, \eta_y)$ (т.к. $D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$, то $a_{12} = \sqrt{a_{11} a_{22}}$)

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0 \Rightarrow \bar{a}_{12} = 0$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} = 0 \\ \bar{a}_{12} = 0 \end{cases}$$

Это т.н. параболический тип.

$u_{\eta\eta} = \hat{F}$, $\hat{F} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ — если сюда не входит u_ξ, то это обычное уравнение второго порядка (не в частных производных).

3) $D < 0$

$\varphi(x, y) = c_1$ (при этом они комплексно сопряжены)

$\psi(x, y) = c_2$

$\xi \equiv \varphi(x, y)$

$\eta \equiv \psi(x, y) \equiv \varphi^*(x, y)$

Введем $\alpha = \dfrac{\varphi + \varphi^*}{2} \equiv \dfrac{\xi + \eta}{2}$

$\beta = \dfrac{\varphi - \varphi^*}{2i} \equiv \dfrac{\xi - \eta}{2i}$

α и β — уже действительные переменные.

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) \equiv 0 \Rightarrow$$

$\bar{a}_{11}$ при замене (α, β) переходит в $\tilde{a}_{11}$ и т.п.:

$\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22} + 2i\tilde{a}_{12} \equiv 0;$

$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22};$

$\tilde{a}_{12} = 0.$

Т.о. каноническая форма:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \hat{F}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

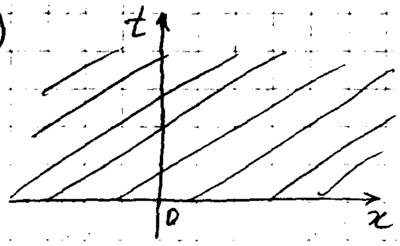
Это т.н. эллиптический тип.

Гиперболическое уравнение.

Запишем в виде:

$\ldots_{xx} \ldots u_{yy} \quad f(x,y)$

Подавляющее большинство волнообразных процессов описываются именно таким уравнением.

1) 

Задаем начальные условия:

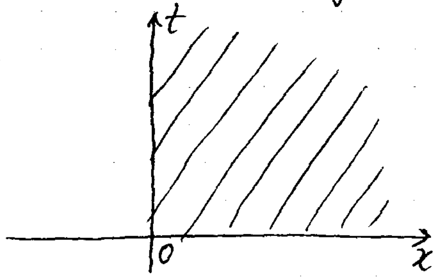
$u(0,x)=\varphi(x,y)$

$u_t(0,x)=\psi(x)$

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \\ u(0,x)=\varphi(x) \\ u_t(0,x)=\psi(x) \end{cases}$$

– задача Коши (решение для $t>0$)
(задача на неогранич. прямой)

2) Решение в одной четверти:

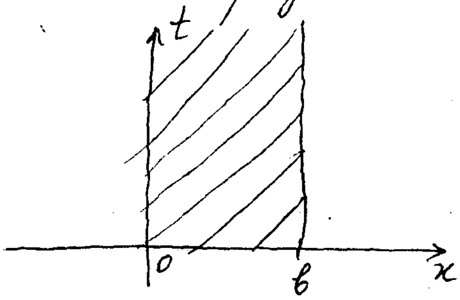


$u(t,0)=\mu_1(t)$

$u_x(t,0)=\mu_2(t)$

Т.н. задача на полуограниченной прямой.

3) На отрезке:



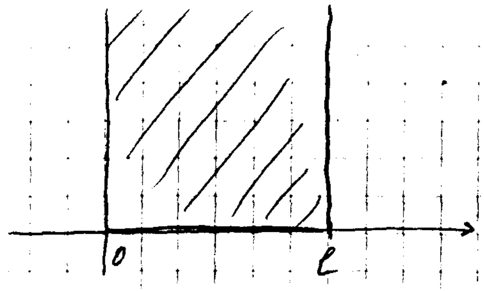
Это т.н. краевая задача.

Именно эти три типа чаще всего встречаются на практике.

Для краевой задачи существует единый способ решения для всех трех типов уравнений – метод Фурье.

<u>Теорема единственности решения краевой задачи для гиперболического типа:</u>

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]+F(t,x) \\ u(0,x)=\varphi(x)\in C_2 \ \text{(2 диф. ф-ции)}, \quad \rho(x),k(x)\in C \\ u_t(0,x)=\psi(x)\in C_1 \ \text{(диф. ф-ция)} \quad \text{(все } \in \text{ – условия } \exists \text{ реш.)} \\ u(t,0)=\mu_1(t)\in C \ \text{(непр. ф-ция)} \\ u(t,l)=\mu_2(t)\in C \end{cases}$$



Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ - решения.

Тогда $v(t,x) \equiv u_1 - u_2$ удовл. уравнению

$v|_\Gamma \equiv 0$ (на границе $v \equiv 0$).

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [k(x) v_x^2 + \rho(x) v_t^2]\,dx$ (физически она играет роль энергии).

Т.к. мы рассматриваем гиперболический тип, то $\rho(x)$ и $k(x)$ одного знака. Пусть $\rho(x), k(x) > 0$.

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [k(x) v_x^2 + \rho(x) v_t^2]\,dx$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int\limits_0^l [k(x) v_x v_{xt} + \rho(x) v_t v_{tt}]\,dx \ominus$$

$$\int\limits_0^l k(x) v_x v_{xt} = \int\limits_0^l k(x) v_x\, d(v_t) = k(x) v_x v_t \Big|_0^l - \int\limits_0^l v_t (k(x) v_x)_x dx =$$

$$= -\int\limits_0^l v_t (k(x) v_x)_x dx$$

$$\ominus \int\limits_0^l v_t [\rho(x) v_{tt} - (k(x) v_x)_x]\,dx \equiv 0 \Rightarrow E(t) = const \Rightarrow E(0) = const$$

Т.к. v удовл. ур-нию $\rho v_{tt} - (k v_x)_x = 0$

$0 = E(0) = const \Rightarrow \forall t \geq 0 \ E(t) \equiv 0$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [\rho(x) v_x^2 + k(x) v_t^2]\,dx \equiv 0, \quad \rho(x), k(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_x \equiv 0 \\ v_t \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow v \equiv const = 0 \ (\text{т.к. } v|_\Gamma \equiv 0)$$

Доказано.

Задача Коши. Формула Д'Аламбера.

Рассмотрим однородное уравнение вида:

$u_{\xi\eta} = 0.$

Неоднородное уравнение, соответственно, имеет вид:

Задача Коши для гиперболического уравнения

$$\left[\begin{array}{l} u_{\xi\eta} = \tilde{F} \\ u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \hat{F} \end{array}\right.$$

Рассмотрим сначала не однородное уравнение:

$u_{\xi\eta} = \cancel{0} = f(\xi, \eta)$

проинтегрируем по η: $\cancel{u_\xi = \underbrace{\int f(\xi,\eta)\,d\eta}_{\equiv f_2(\eta} + f_1(\xi)}$

$u_\xi = \int f(\xi,\eta)\,d\eta + g(\xi)$

$u(\xi,\eta) =$

Рассмотрим однородное уравнение:

$u_{\xi\eta} = 0$

$u_\xi = g(\xi)$

$\underline{u(\xi,\eta)} = \int g(\xi)\,d\xi + f_2(\eta) \equiv \underline{f_1(\xi) + f_2(\eta)}$

Коэффициенты a считаем постоянными.

Теперь рассмотрим такое уравнение:

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

$\frac{dx}{dt} = \pm a$

$x + at = c$

характеристики:

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

тогда:

$u_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow f_1(\xi) + f_2(\eta).$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \\ u_t(t=0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

общее решение: $u(t,x) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$

найдем частное решение:

$$\begin{cases} u(0,x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \\ f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \end{cases}$$

Итак, получено единственное зо реш-е задачи Коши: (для гиперболической задачи):

$$\boxed{u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha}$$

Рассмотрим линейную задачу:

$$\begin{cases} Lu = f \\ u_н = \varphi \\ u_г = \mu \end{cases} \qquad u = u_1 + u_2 + u_3$$

тогда, если

$$\begin{cases} Lu_1 = f \\ u_{1н} = 0 \\ u_{1г} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} Lu_2 = 0 \\ u_{2н} = \varphi \\ u_{2г} = \mu \end{cases}, \quad \begin{cases} L u_3 = 0 \\ u_{3н} = 0 \\ u_{3г} = \varphi \end{cases}, \text{ то}$$

достаточно решать задачи „по частям"
(принцип суперпозиций)

Тогда; задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 = f(t,x) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

имеет следующее решение: (путем преобразов.):

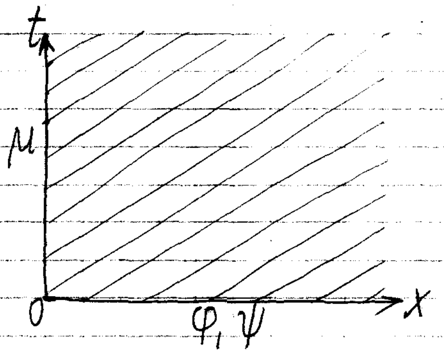
$$u(t,x) = \frac{a}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\alpha)\, d\alpha\, d\tau$$ (можно проверить).
см.: интеграл с переменным верхним пределом

Итак, общее решение задачи Коши имеет вид:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{a}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\alpha)\,d\alpha\,d\tau.$$

Предположим, что имеется задача на полуограниченной прямой:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x) \\ u(t=0,x) = \varphi(x) \\ u_t(t=0,x) = \psi(x) \\ u(t,a) = 0 \end{cases}$$



Легко догадаться, что если начальная ф-ция нечетная, то при произвольном t она равна нулю. (хотя не имеет значения, отн. какой точки рассматривать нечетность).

$$u(t,0)=\frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\psi(\alpha)\,d\alpha\equiv 0.$$

(φ, ψ нечетные).

Тогда продолжим φ, ψ на всю числовую ось нечетным образом. Имеем задачу Коши, которую уже известно, как решать.

Рассмотрим такую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u|_{t=0}=0\\ u_t|_{t=0}=0\\ u(t,0)=\mu(t)\end{cases}$$

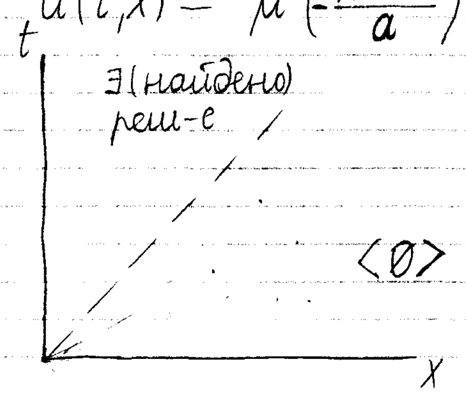
Можно воспользоваться тем соображением, что: решение $u(t,x)$ зависит от μ:

$$u(t,x)=g(x-at)$$

$$u(t,0)=g(-at)\equiv\mu(t),$$

$$g(\alpha)\equiv\mu\left(-\frac{\alpha}{a}\right);$$

$$u(t,x)=\mu\left(-\frac{x-at}{a}\right)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right).$$



$$\tilde{\mu}=\begin{cases}\mu(t), & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

полное решение:

$$u(t,x)=\frac{\tilde{\varphi}(x+at)+\tilde{\varphi}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\ldots+\iint+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Параболические уравнения

$$u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Постановка задачи Коши:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (*) \\ u(t=0, x) = \varphi(x) & (**) \end{cases}$$

Неприятность: иногда решение неограничено, и нет единственности. Поэтому накладывают еще два условия:

$$\begin{cases} |u(t,x)| \leqslant M; & (*') \\ \lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = \varphi(x) & (**') \end{cases}$$

(иногда t_0 подставлять нельзя).

Предположим, что решение можно представить:
$u(t,x) \overset{?}{=} X(x) \cdot T(t)$, подставим:

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot \cancel{u_{xx}}\, X''(x) \cdot T(t)$$

$(X, T \not\equiv 0)$;

$$\frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \quad (a - \text{число}),$$

что возможно только в случае:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \equiv -\lambda^2 \quad (<0),$$

можно решить каждое уравнение:

$$\left[\begin{array}{l} X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = e^{\pm i\lambda x} \\ T' + \lambda^2 T^2 = 0 \Longrightarrow T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t} \end{array} \right.$$

Да, такое решение может быть:

$$u(t,x) = A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}.$$

Если λ взять другим, то получились бы неограниченные решения. Можно построить „суперпозицию":

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{\dots}\, d\lambda.$$

Можно ли подобрать "константу" $A(\lambda)$:

$$u(0,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \varphi(x) \quad (\text{преобр. Fourier}).$$

$A(\lambda)$ — обратное преобразование:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi.$$

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi\right] e^{-\lambda^2 a^2 t + i\lambda x}\, d\lambda.$$

Формулу решения можно упростить.

Семинар

Уравнения мат. физики

Существуют определенные классы уравнений:
- ур. Даламбера: волновые явления
- ур. теплопроводности, диффузии, ...
- ур. Лапласа (электродинамика).

Данные классы уравнений обладают определенным свойством универсальности.

Современные нелинейные уравнения мат. физики иногда имеют солитонные решения (солитон – частицеподобная ф-ция).

Уравнение Даламбера (волновое ур-е)

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где параметр a – „скорость распространения волны".

Задача (начальная; например, для струны):

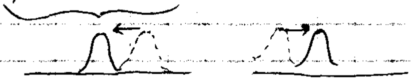
$u(0,x) = \varphi(x)$

$u_t(0,x) = \psi(x)$

(задача Коши).

Решение задачи дается формулой Даламбера:

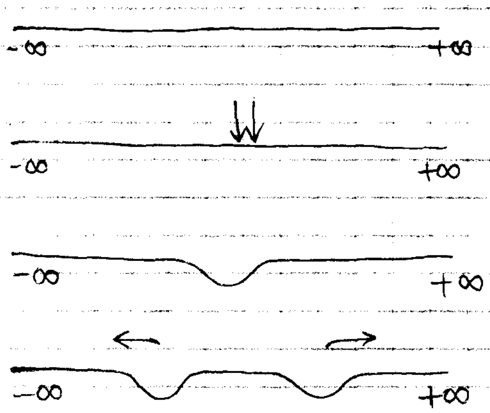
$$u(x)=\frac{1}{2}\big(\underbrace{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}\big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds.$$



(начальный профиль) (начальная скорость)

Заметим, что в данном решении φ и ψ в данном решении фигурируют по отдельности.

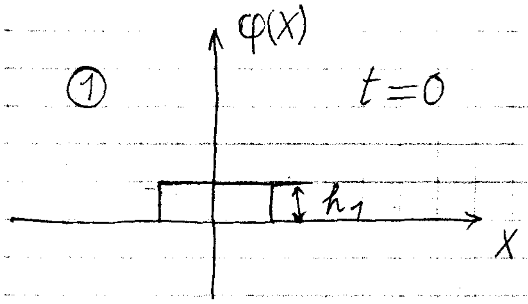
Интертрепация:



$0\le t\le+\infty$

$-\infty\le x\le+\infty$

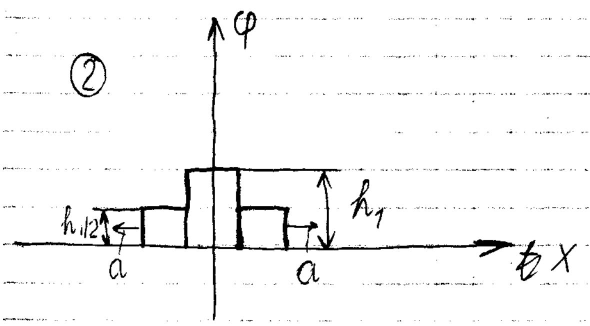
① $t=0$ (для $\psi=0$)



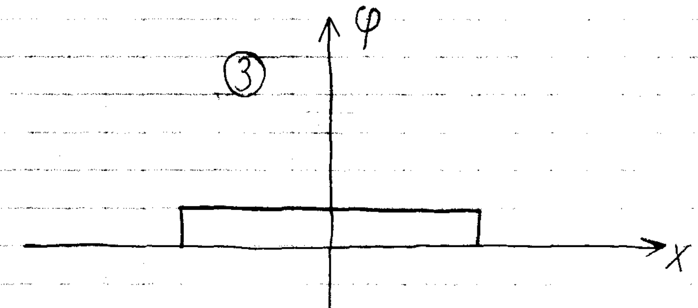
(начальное возмущение)

[ЭКЗ: изучить данный вопрос, ф-цию $u(t,x)$ предъявлять по 1 требованию

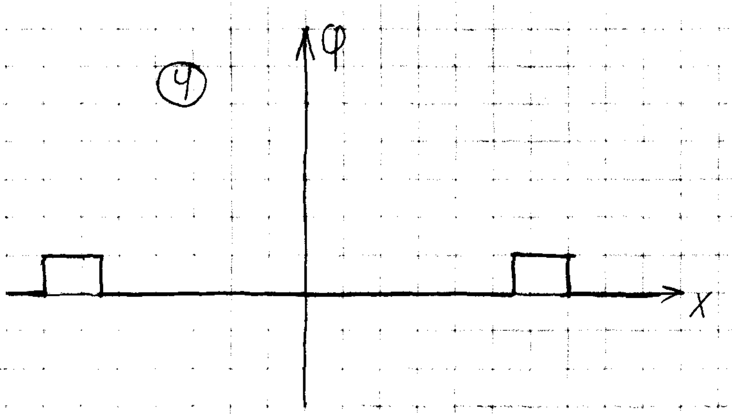
②



③



④



Время, Вперед!

(для начальной скросcти $\psi = 0$.

Решим такую задачу:

$$\begin{cases} \dots \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = v_0 \end{cases}$$

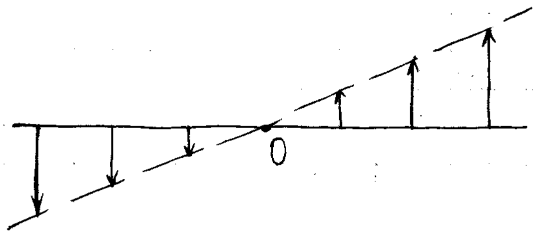
$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0\, ds = \frac{v_0}{2a}\, s\Big|_{x-at}^{x+at} = v_0 t,$$

это означает, что струна поступательно движется со скросстью v_0.

$$\begin{cases} \dots \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = x \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} x\, ds = \frac{x}{2a}\cdot 2at = xt$$

Струна как бы поворачивается вокруг точки 0:



(не очень физический пример: $v_{x\to\infty} > c$).

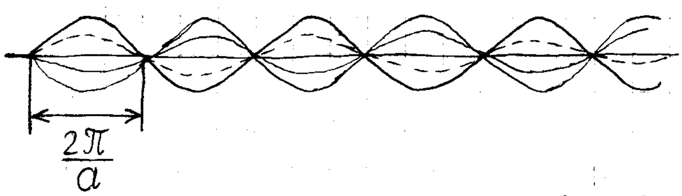
a — скорость движения сигнала по струне.

$$\begin{cases} \ldots \\ \varphi(x) = \sin a\cancel{t}x \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\sin a(x+at) + \sin a(x-at)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(ax + a^2t) + \sin(ax - a^2t)\right) =$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(\sin} = \frac{1}{2}\left(\sin ax \cos a^2t \boxed{\cancel{+\cos ax \sin a^2t}} + \sin ax \cos a^2t - \boxed{\cancel{-\cos ax \sin a^2t}}\right) = \sin ax \cos a^2t$$ (стоячая волна).



= сумма двух волн, распр. в противоп. напр-ях.

MAPLE 8

```
> with(networks):
> g:= void(8);    { граф только из вершин}
> addedges([{ }, { }, ..., { }],g]);
> addedge(Cycle(1,2,3,4),g);
> addedge(Path(4,5,6,7),g);
> draw(Concentric([1,2,3,4]),g);
```

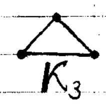
```
> adjacency(g);
> h:= sort(simplify(charpoly(g,x)));
> factor(h);     { факторизация полинома }
```

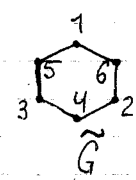
Существует только 13 трехвалентных 
графов с целыми спектрами (например, тетраэдр).

Двудольный дубль

$\widetilde{G}$ наз. двудольным дублем графа G, если
$$A_{\widetilde{G}} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & A_G \\ A_G & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

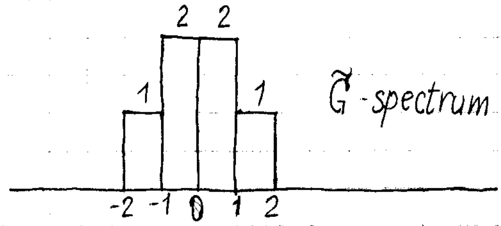
Двудольный дубль — тоже граф, но здесь все блоки квадратные одинаковой размерности.

<u>Пример.</u> 

двудольный дубль K_3: 

$$A_{\widetilde{G}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & 1 \\ & \mathbb{O} & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \mathbb{O} & \\ 1 & 1 & 0 & & & \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 4 * 1 \\ 5 * 2 \\ 6 * 3 \end{cases}$$

$$P_G(\lambda) = P_{K_3}(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$$
$$P_{\widetilde{G}}(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 =$$
$$= P_G(\lambda)\cdot P_G(-\lambda)\cdot(-1)^3.$$



Утв.: $P_{\tilde G}(\lambda) = P_G(\lambda)\, P_G(-\lambda)\cdot(-1)^n \quad (n = \|G\| \equiv \dim G)$

Док-во:

$$P_{\tilde G}(\lambda) = \left|\begin{array}{c|c} -\lambda E & A_G \\ \hline A_G & -\lambda E\end{array}\right| = |-\lambda E|\cdot|-\lambda E - A_G\cdot(-\lambda E)^{-1}\cdot A_G| =$$

$$= |(-\lambda E)\cdot(-\lambda E) - A_G^2| = |(-\lambda)^2 E - A_G^2| =$$

$$= [A^2 - E = A^2 - E^2 = (A-E)(A+E),\ [A,E] = AE - EA = 0] =$$

$$= |(-\lambda E - A_G)(-\lambda E + A_G)| = \underbrace{|A_G - \lambda E|}_{P_G(\lambda)}\cdot \underbrace{|A + \lambda E|}_{\cdot(-1)^n P_G(-\lambda)}\cdot \underbrace{(-1)^{\dim A_G}} =$$

$$= \underbrace{(-1)^n\cdot(-1)^n}_{=1}\cdot P_G(\lambda)\cdot P_G(-\lambda) = P_G(\lambda)\cdot P_G(-\lambda)(-1)^n,\ \text{ч.т.д.}$$

Пример. Куб – ДД тетраэдра.

$P_G(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda-3)$

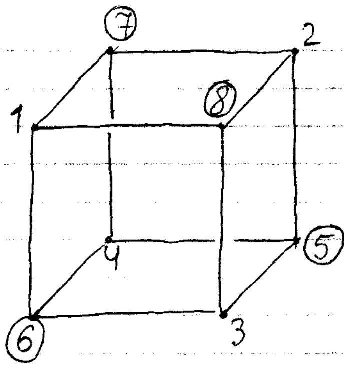
$\cancel{P_{\tilde G}(\lambda)} \quad A_{\tilde G} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \end{array}\right)$

1 $\ast$ 5

2 $\ast$ 6

3 $\ast$ 7

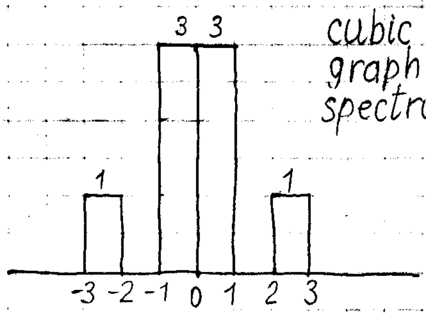
4 $\ast$ 8



Пример. DD „бензола" — облом. Нужно брать полные графы, чтобы получить не 2 копии.

(Bipartile Double - DD).

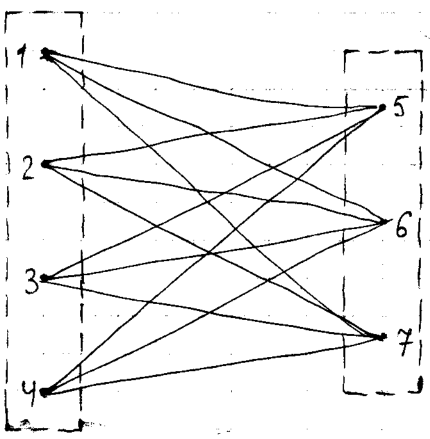
$$P_{\tilde{G}}(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda+1)^3(\lambda-1)^3\cdot(-1)^4$$



cubic graph spectrum

[спектры platon body graphs.

Полные двудольные графы



$K_{3,4}$ ("$K_{r,s}$")

$$A_{K_{34}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} & & & & 1 & 1 & 1 \\ & \underset{4\times4}{0} & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & \underset{3\times3}{0} & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & \end{array}\right)$$

s вершин (s=4)

r вершин (r=3)

Ранг матрицы — максимальный порядок отличного от нуля минора — число ЛНЗ строк / столбцов.

$$\mathrm{Rang}\, A_{K_{r,s}} \equiv 2, \ \forall r,s. \quad \mathrm{defect}\, A \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \dim A - \mathrm{rang}\, A = r+s-2.$$

$$\|A_{K_{r,s}}\| = \|-\lambda E_s\| \cdot \| -\lambda E_r - 1\!\!1_{r\times s} \cdot (-\lambda E)^{-1} \cdot 1\!\!1_{s\times r}\| =$$

$$= (-1)^s \cdot \lambda^s \cdot \| -\lambda E_r$$

Утв. Дефективную матрицу нельзя обратить; среди собств. значений всегда есть ноль.

Утв. Если матрицу можно обратить в диагональный вид, то кр. „СЗ $=0$" равняется дефекту.

Найдем спектр полного двудольного графа.

Используем теорему Харари - Коулсона - Сакса:

$$P_G(\lambda) = \underbrace{\lambda^{r+s}}_{\text{число вершин}} + \underbrace{0}_{\text{число петель}} + a_2\lambda^{r+s-2}, \quad (\text{других членов нет, ибо кр. нуля} = 2),$$

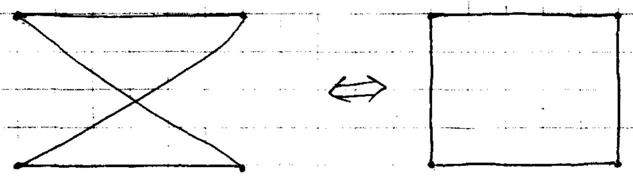
$a_2 =$ −число ребер $= -rs$

$$\boxed{P_G(\lambda) = \lambda^{r+s} + -rs\lambda^{r+s-2} = \lambda^{r+s-2}\cdot(\lambda^2 - rs)}$$

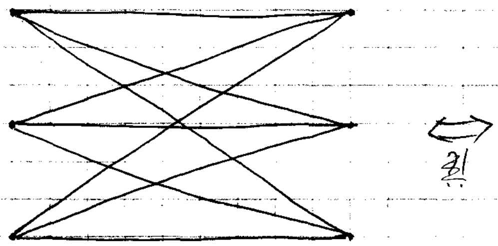
$$\lambda = \{\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{r+s-2}, \pm\sqrt{rs}\} = \{0^{r+s-2}, \pm\sqrt{rs}\}.$$

Если $r=s$, то спектр целый: $P_G(\lambda) = \lambda^{2r-2}(\lambda^2 - r^2) =$
$= \lambda^{2(r-1)}(\lambda - r)(\lambda + r)$.

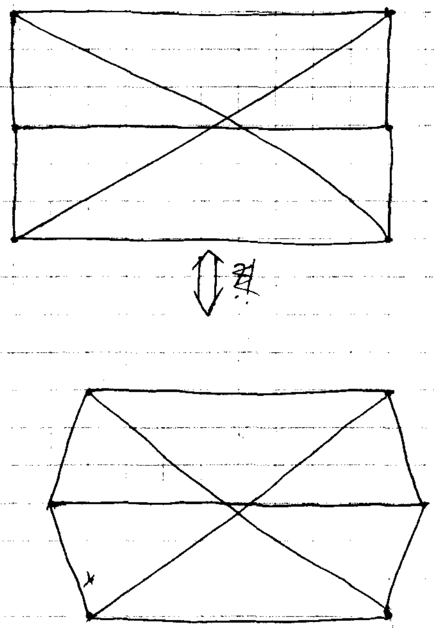
Пример. $r=s=2$



$K_{2,2}$ $\qquad$ $P_G(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+2)\cdot\lambda^2$



$K_{3,3}$



$P_G(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+3)\cdot\lambda^4$

(~ скаленоэдр)

Рекуррентная формула Хельброннера

Графическое понижение степени вычисляемого характ. полинома.

Пусть G после удаления l (ребра) распадается на 2 части, (для хорошего упрощения формул):

$$P_G(\lambda) = P_{G-l}(\lambda) - P_{G\ominus l}(\lambda).$$

! только для charpoly, при старшем члене $\oplus$ 1