Задача Коши

Можно ли задать какое-либо начальное условие (не умаляя общности, для (1)), по которому можно однозначно получить частное решение?

Задача (Коши) в данном случае ставится сл. обр.:

(1*) $u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1 \dots x_{n-1})$ (т. е. задана гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n-1}$ "задана в сечении x_n^0").

Возьмем первые интегралы:

$\varphi_1(x_1 \dots x_{n-1}, x_n)$

$\varphi_2(x_1 \dots x_{n-1}, x_n)$ почему именно x_n?

$\varphi_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1}, x_n)$

Причем x_n в якобиане J такой столбец, что φ_k независимы.

Составим систему равенств:

$\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \eta_1$

$\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \eta_{n-1}$

Поскольку минор $\neq 0$, то можно выразить $x_1 \dots x_{n-1}$:

$x_1 = \omega_1(\eta_1 \dots \eta_{n-1})$

$x_{n-1} = \omega_{n-1}(\eta_1 \dots \eta_{n-1})$

Тогда решение задачи Коши существует и единственно:

$$u(x_1 \dots x_n) = \varphi[\omega_1(\eta_1 \dots \eta_{n-1}), \dots \omega_{n-1}(\eta_1 \dots \eta_{n-1})] =$$
$$= \varphi[\omega_1(\varphi_1(\dots) \dots \varphi_{n-1}(\dots)), \dots, \omega_{n-1}(\varphi_1(\dots), \dots, \varphi_{n-1}(\dots))]$$

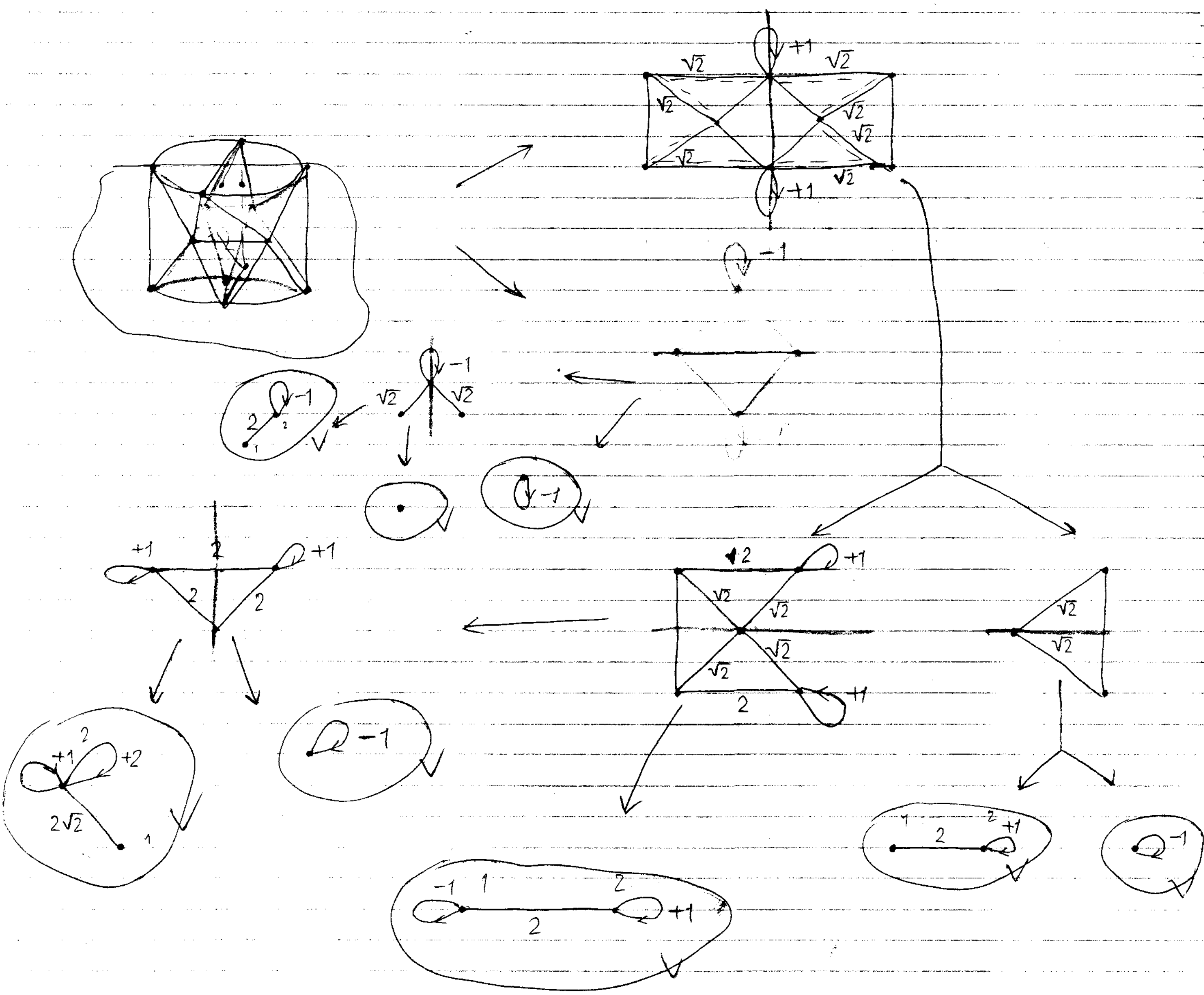
Причем данное решение единственно:

$$u(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n^0) = \varphi\{\omega_1(\varphi_1(x_1 \ldots x_{n-1}, \underline{x_n^0}) \ldots) \ldots\} =$$

$$= \varphi\{\omega_1(\eta_1 \ldots \eta_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\eta_1 \ldots \eta_{n-1})\} = \varphi(x_1 \ldots x_{n-1})$$ —

удовлетворяет начальному условию, ч.т.д.

Семинар



1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $|A+\lambda E| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 4$;

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}}$$

2. $A = (0)$; $\boxed{\lambda_3 = 0}$

3. $A = (-1)$; $\boxed{\lambda_4 = 1}$.

4. $\boxed{\lambda_5 = 1}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$; $|A+\lambda E| = 3\lambda^2 - 8 = 0$;

$\lambda^2 = \frac{8}{3}$;

$$\boxed{\lambda_{6,7} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

6. $A = \ldots$ $\boxed{\lambda_8 = 1}$

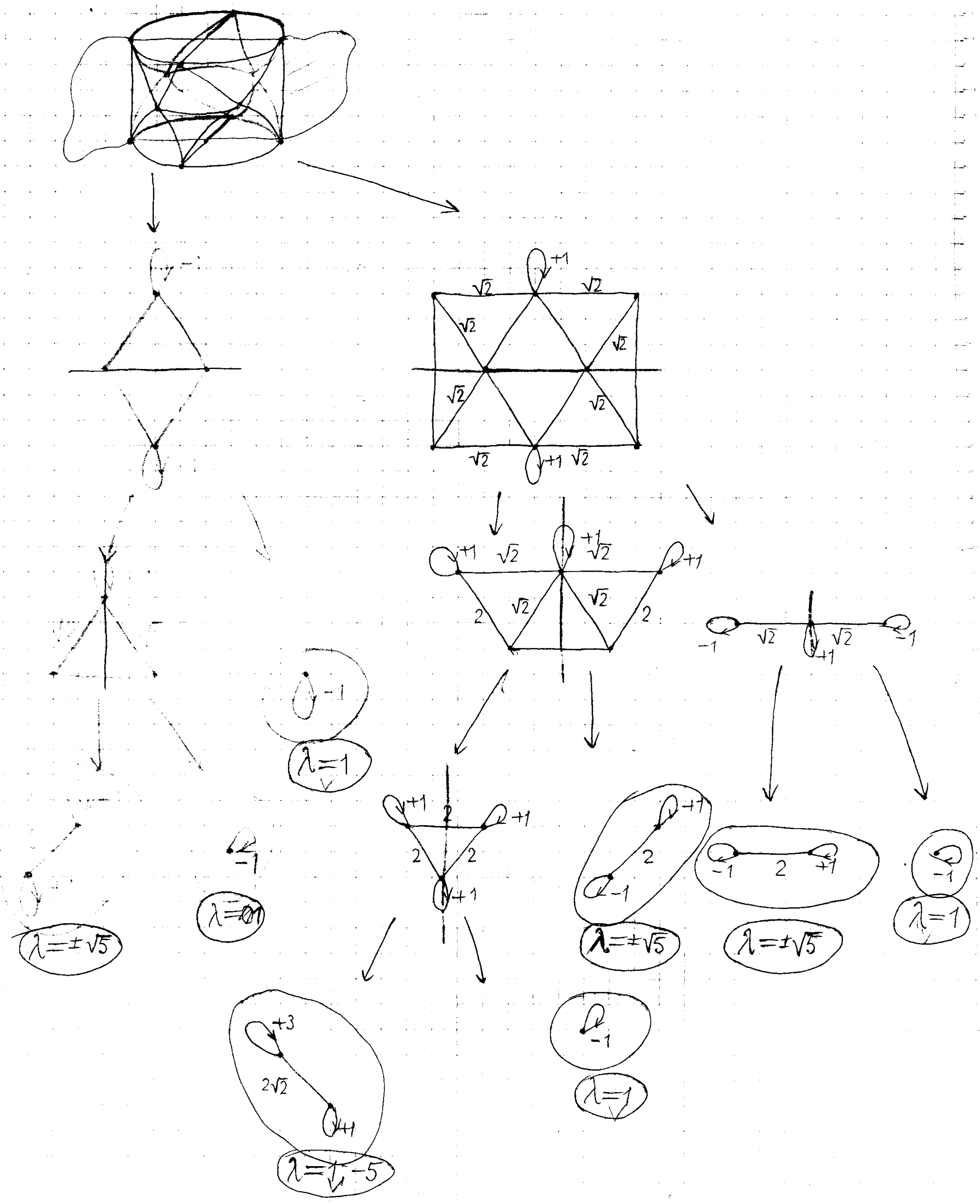
7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A+\lambda E| = \lambda^2 + \lambda - 1$;

$$\boxed{\lambda_{9,10} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $|A+\lambda E| = \lambda^2 - 1 - 4 = \lambda^2 - 5 = 0$;

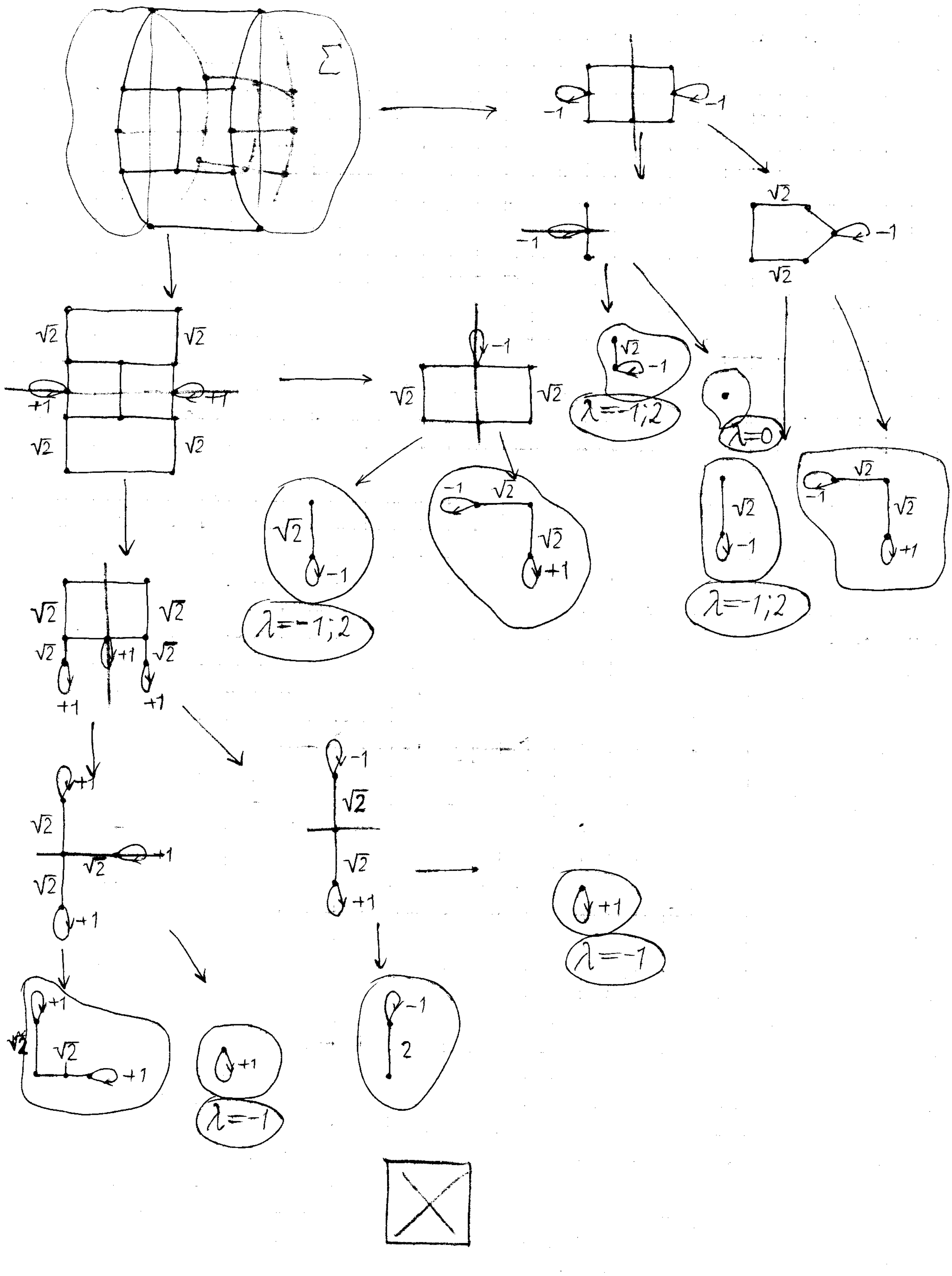
$$\boxed{\lambda_{11,12} = \pm\sqrt{5}}$$

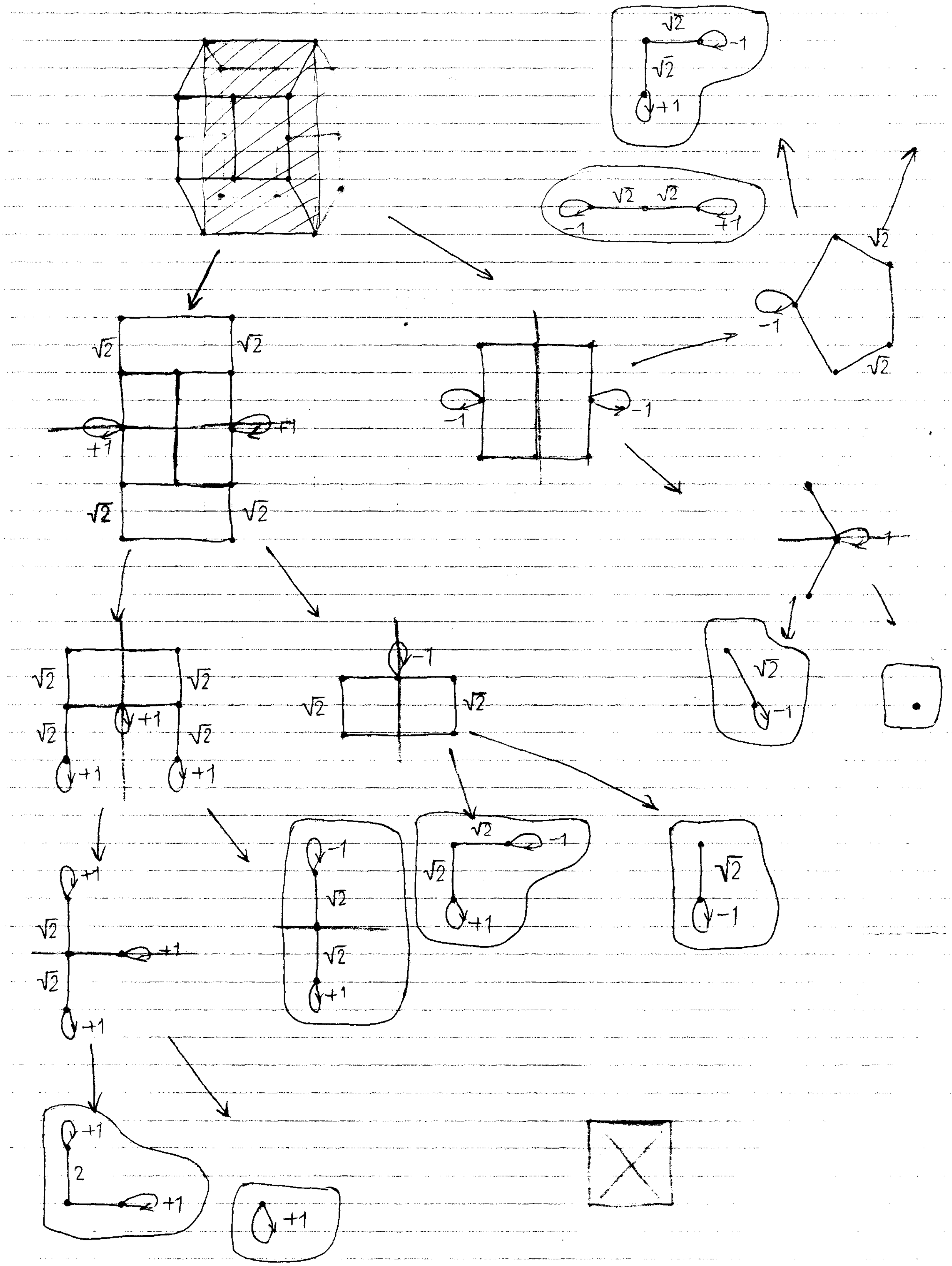
9.



$$P_{G_{icosahedron}}(\lambda) = \cancel{\lambda(\lambda+1)}(\lambda-\sqrt{5})^3(\lambda+\sqrt{5})^3(\lambda+1)^5(\lambda+5)$$

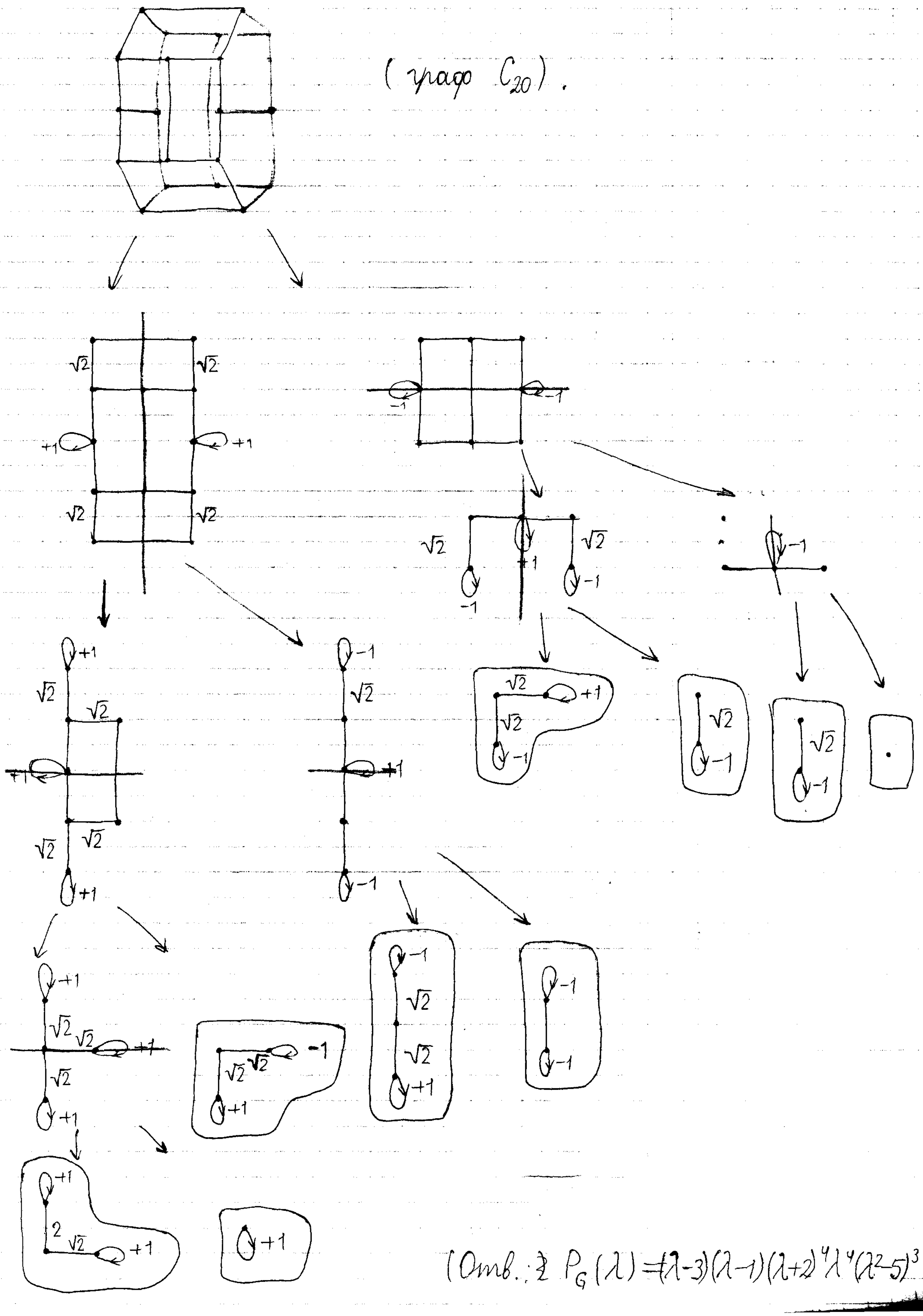
додекаэдр :





√2
−1
+1
2

(граф C_{20}).



(Отв.: $P_G(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2)^4\lambda^4(\lambda^2-5)^3$

Теорема. Наибольшим числом в спектре ~~правильного~~ регулярного графа является валентность графа. Это число ~~явл.~~ имеет кратность 1.

Дифференциальные уравнения

$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1 \ldots x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x} = b(x_1 \ldots x_n, z)$ — квазилинейное уравнение в частных производных.

Составим уравнение характеристик:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \quad (n \text{ уравнений})$$

Решая, найдем первые интегралы (φ_n — n штук):

$\varphi_i(x_1 \ldots x_n, z) = c_i$ (они должны быть независимы).

Общее решение системы имеет вид:

$F(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n) = 0$.

Условие Коши: из начальных условий находят соотношения между c_i и подставить их в φ_i.

Примеры

$\boxed{1}$ $\sin^2 x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + tg z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{tg z} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

$-d\,ctg x = d\,tg z$; $\quad tg x = tg z + c_1$; $\quad \underline{ctg x + tg z = c_1}$;

$\cancel{\cos^2 z\, dy = tg z\, dz}$

$$\cancel{\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{\operatorname{tg} z}}$$

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} z} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

$$\cos^2 z\, dy = \operatorname{tg} z\, dz;$$

$$dy = \frac{\sin z\, dz}{\cos^3 z} = -\frac{d(\cos z)}{\cos^3 z} = d\frac{1}{2\cos^2 z};$$

$$y = c + \frac{1}{2\cos^2 z}; \qquad y - \frac{1}{2\cos^2 z} = \bar{c}_2$$

$$\Downarrow$$

$$y - \frac{\operatorname{tg}^2 z}{2} = c_2$$

Общее решение: $\varphi(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x,\ 2y - \operatorname{tg}^2 z) = 0$.

$\boxed{2}$

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ z = 2x \text{ при } y = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{\cancel{dz}}{\cancel{0}}\ 0\ \cancel{dz} \qquad (dz = 0)$$

$$xy = \cancel{\frac{x}{y}} = c_1 \quad ? \qquad (z = const)$$

$$z = c_2$$

(Вырожденное уравнение характеристик).

Общее решение: $F(z, xy) = 0$

$$\Downarrow$$

$$z = \varphi(xy)$$

Теперь найдем частное решение:

$$\begin{cases} z = c_1 \\ xy = c_2 \\ z = 2x \\ y = 1 \end{cases}$$

исключим z, y, x: $\quad c_2 = x = \frac{z}{2} = \frac{c_1}{2}$.

$\boxed{z = 2xy}$ — частное решение.

$\boxed{3}$ $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{0};$$

$$\frac{x}{y}=c_1 \qquad u=c_3$$

$$\frac{x}{z}=c_2$$

$\frac{y}{z}=c_3$ – зависит от c_1, c_2;

общее решение: $F\left(\frac{x}{y};\frac{x}{z};u\right)=0$

$$u(x,y,z)\Big|_{y^2+z^2=2}=\frac{2}{x^2}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=c_1\\ \frac{x}{z}=c_2\\ u=c_3\\ y^2+z^2=2\\ u=\frac{2}{x^2}\end{cases}$$

$$\cancel{c_3=\frac{2}{x^2}=\frac{2}{c_1^2y^2}}$$

$$y=\frac{x}{c_1}$$

$$z=\frac{x}{c_2}$$

$$x^2\cdot\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)=2$$

$$\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}=\frac{2}{x^2}=u=c_3$$

$$c_3=\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}$$

$$u=\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}=\left(\frac{x^2}{y^2}\right)+\left(\frac{x^2}{z^2}\right).$$

$\boxed{\text{TRAINING}}$

$$\begin{cases}\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{-xy}\\ y=x^2\\ z=x^3\end{cases}$$

рассм на примерах
переход от задачи Коши к системе первых интегралов?

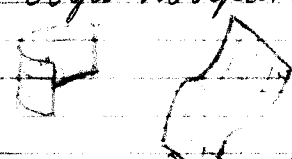
8.04.2004
§8

Примеры

1 $\begin{cases} xz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=-xy \end{cases}$ (квазилинейное уравнение)

Найти ф-цию z, удовлетворяющую условию:

$\begin{cases} y=x^2 \\ z=x^3 \end{cases}$ | линия пересечения двух поверхностей в пространстве.



Для решения рекомендуется представить кривую в параметрической форме:
введем параметр t:

$$x=t,\quad y=t^2,\ z=t^3$$

Необходимо найти $V(x,y,z)=0$, откуда $z=F(x;y)$, где z – решение уравнения.

Для определения первых интегралов составим симметричную систему:

$$\underbrace{\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}}=\frac{dz}{-xy}$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=c_1};$$

$$\frac{ydx}{z}=\frac{xdy}{z}=-dz;$$

$$ydx=xdy=-zdz$$

$$ydx+xdy=-\cancel{2}zdz$$

$$d(xy)=-\cancel{\tfrac{1}{2}}d(z^2)=d(-z^2)$$

$$\boxed{z^2+xy=C_2}$$

Любая комбинация $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)=0$ есть решение однородного уравнения относительно V, а нужно найти единственное. Подставим в первые интегралы параметрическое „начальное условие":

$$\begin{cases} t=C_1 \\ t^6+t^3=C_2 \end{cases}.$$

Исключим t из уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=C_1 \\ \varphi_2(x,y,z)=C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t)=C_1 \\ \tilde{\varphi}_2(t)=C_2 \end{cases} \Rightarrow \Psi(C_1,C_2)=0$$

$$V(x,y,z)=\Psi(\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z))=0$$

$$t=C_1 \Rightarrow C_1^6+C_1^3=C_2;$$

$C_1^6+C_1^3-C_2=0$; $\underline{\left(\frac{x}{y}\right)^6+\left(\frac{x}{y}\right)^3=z^2+xy}$. Осталось только выразить z:

$$z=\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^6+\left(\frac{x}{y}\right)^3-xy}$$ — искомое решение задачи.

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy \\ x = 2 \\ z = y^2 + 1 \end{cases}$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = c_1}$$

$$x = c_1 y \ ; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - c_1 y^2}$$

$$\cancel{\frac{dx - dz}{x - z + xy} = \frac{dy}{y}}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z - c_1 y^2}{y} = \frac{z}{y} - c_1 y$$

1) $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z}{y}$; $z = p \cdot \cancel{x} y$

2) $z = p(y) \cdot y$; $z' = p'y + p$;

$$p'y + p = p - c_1 y \ ;$$

$$p' = -c_1$$

$$p = -c_1 y + \alpha; \quad z = (\alpha - c_1 y) \cdot y = \alpha y - c_1 y^2$$

$$\boxed{z = \alpha y - c_1 y^2} \Rightarrow \frac{z + c_1 y^2}{y} = c_2 \Rightarrow \boxed{\frac{z + xy}{y} = c_2}$$

Т. о., $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = c_1 \\ \dfrac{z + xy}{y} = c_2 \end{cases}$

„Начальные" условия в параметрической форме:

$\begin{cases} x = 2, \ y = t \\ z = t^2 + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{t} = c_1, \ t = \dfrac{2}{c_1} \\ \dfrac{t^2 + 1 + 2t}{t} = c_2 \end{cases} \longrightarrow \dfrac{(2/c_1)^2 + 4/c_1 + 1}{2/c_1} - c_2 = 0$

$$\frac{\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y}{x}+1}{\frac{y}{x}} - \frac{z+xy}{y} = 0$$

$$\frac{4y}{x}+4+\frac{x}{y}-\frac{z}{y}-x=0$$

Отв.: $z = y\cdot\left(\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}-x+4\right)$.

$$X[u] = \sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x})\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Предположим, нашли систему $(n-1)$ независимых первых интегралов:

$$\begin{cases} \varphi_1(\vec{x}) = C_1 \\ \dots \\ \varphi_{n-1}(\vec{x}) = C_{n-1} \end{cases} \Leftarrow \frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Систему первых интегралов можно рассматривать как уравнение некоторой линии в пространстве $\mathbb{R}^n$ (ср.: $(n-1)$ уравнений с n неизвестными).

[Если

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \boxed{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \boxed{\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_m}} & \dots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} : \text{ минор} \neq 0 \text{ в } \Omega,$$

то можно выразить x_m через x остальные; это и есть независимость $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ по определению.]

Кривая эта наз. <u>характеристикой</u>.

Как ведет себя решение $u(\bar{x})$ вдоль кривой характеристики?

<u>Теорема</u>. Вдоль характеристики решение постоянно.

■ $\frac{dx_1}{X_1(\bar{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(\bar{x})} \equiv \lambda.$

Рассмотрим $du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$, и запись первого дифференциала инвариантна.

Вдоль характеристики:

$du = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \lambda \cdot X_i = \lambda \cdot \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot X_i = 0$ в силу того, что u — решение. ■

Рассмотрим такую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ t > 0 \\ u(t=0, x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (\text{Cauchy})$$

Составим уравнение для характеристик:

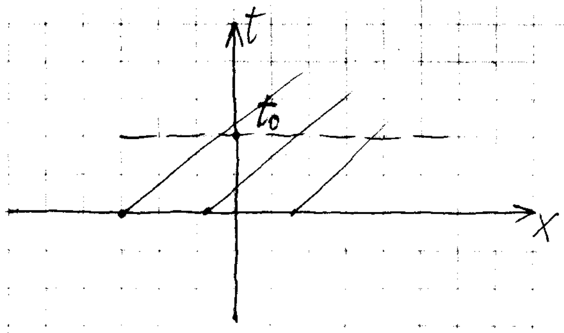
$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-a}$;

$x + at = c$ — характеристика $(\Leftrightarrow t = -\frac{1}{a}x + \frac{c}{a}, a \neq 0)$

Общее решение: $u(x,t) = \varphi(x + at)$

Видно, что через любую точку проходит характеристика; $u|_{\varphi} = const$; если взять точку x_0 на оси Ox $(t=0)$, то, в силу постоянства $u(t,x)$, на всей прямой $t = -\frac{1}{a}x_0 + \frac{\bar{c}}{a}$ $\quad u \equiv u(t=0, x_0) \equiv Const.$

Так как a известно, то можно любое сечение t_0 записать как $\varphi(x + at_0)$ (просто сдвиг):



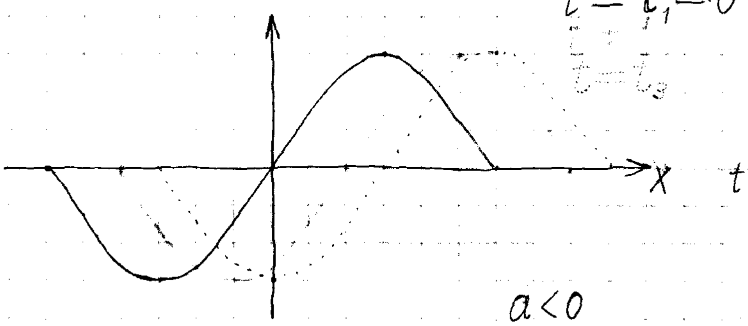
$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -a$, скорость „движения" координаты x.

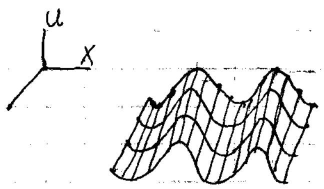
Причем $a > 0 \Rightarrow$ влево

$a < 0 \Rightarrow$ вправо.

Т.о., решение „движется" со временем (t) со скоростью a.

$t = t_1 = 0$





$a < 0$

Рассмотрим другую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(t=0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

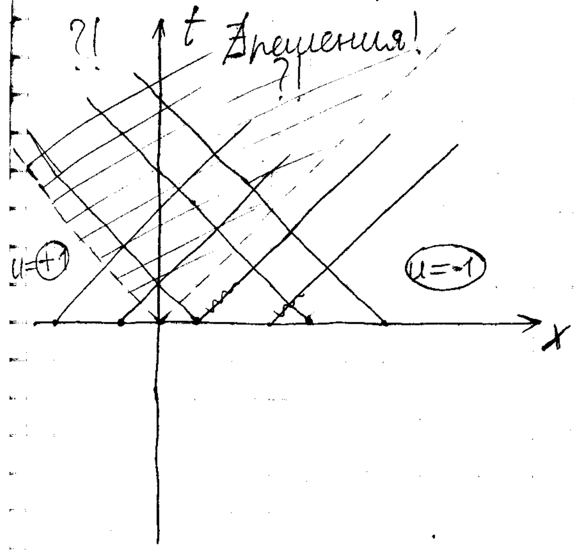
$$dt = \frac{dx}{-u} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = -u$$

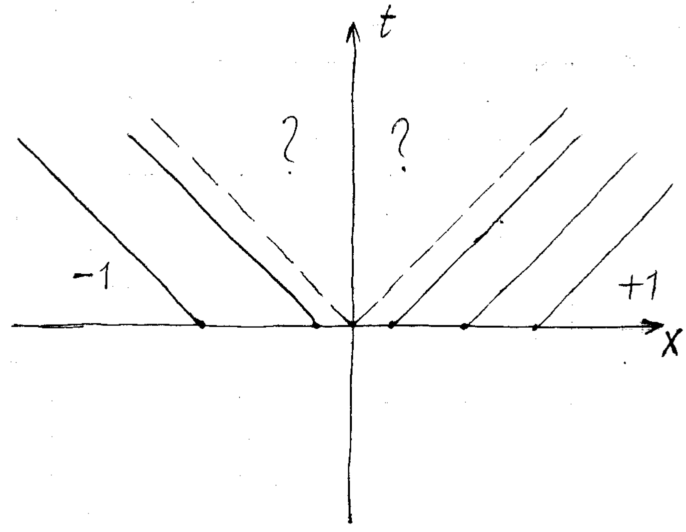
Вдоль характеристики решение постоянно:

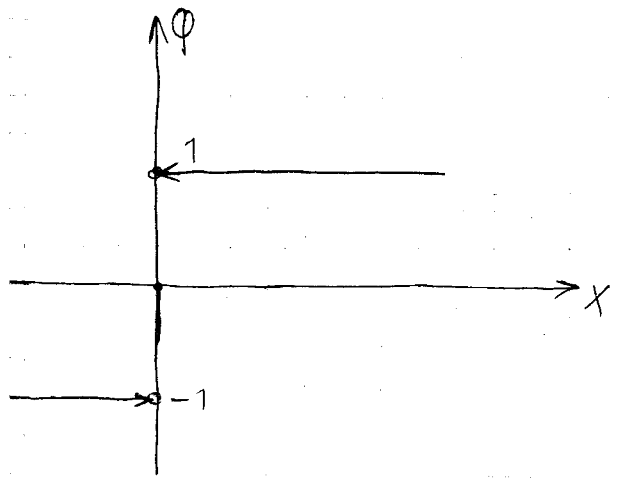
$-u\,dt = dx$; $x + ut = c$, $t = -\frac{1}{u} t + \frac{c}{u}$

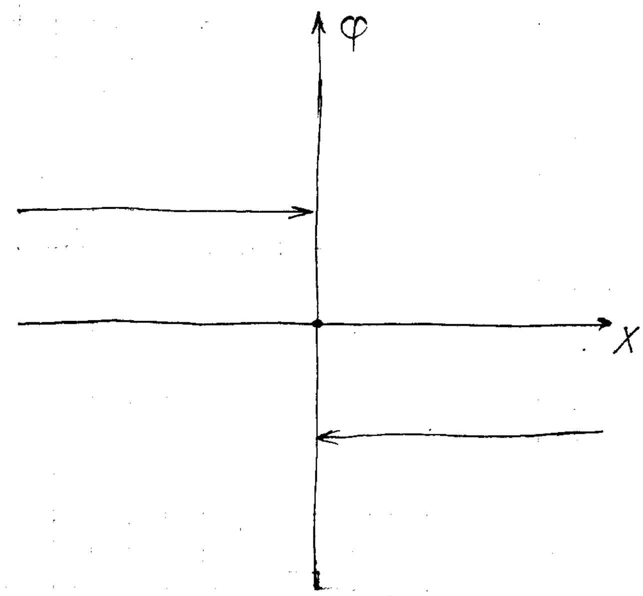
общее решение вдоль характеристики:

$$u(x,t) = \varphi(ut + x)$$



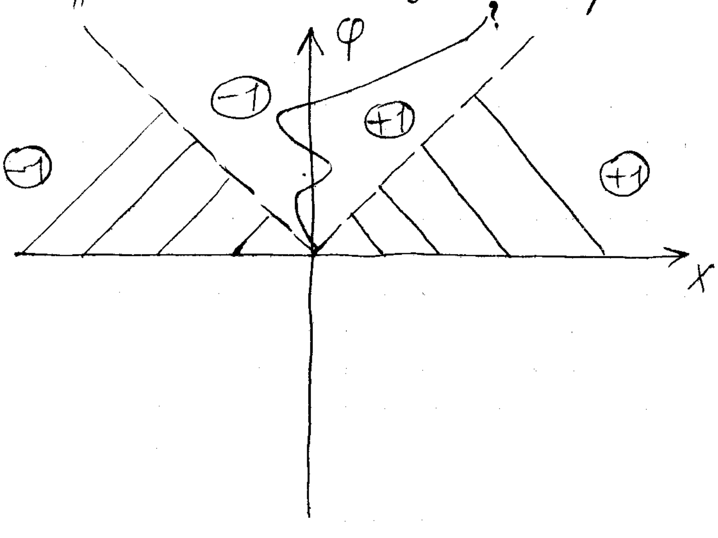






Что делать ?!

Введена „модель" обобщенных решений.



Возьмем область Ω с «верхняя полуплоскость Oxt», и проинтегрируем наше уравнение:

$$0=\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}\right\}dt\,dx=\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right\}dt\,dx=$$

$$=\oint\limits_{\Gamma}-\frac{u^2}{2}dt-u\,dx\quad,\ \forall\Gamma-\text{граница }\Omega.$$

Итак, доказана теорема:

$$\forall\Gamma:\ \oint\limits_{\Gamma}=0\Longleftrightarrow\ \frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

(„основная лемма вариационного исчисления").

Но в уравнении $\oint(\cdot\cdot)=0$ не требуется непрерывность $u(x,t)$, требуется лишь интегрируемость, хотя обратный переход „$\Leftarrow$" невозможен: u не дифф.

<u>Опр.</u> Обобщенным решением уравнения... наз. такая u, что $\forall\Gamma$:

$$\oint(\cdot)=0.$$

Семинар

$\boxed{1}$ $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x-3y)$, $yz+1=0, x=1$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2(x-3y)}$$

$$xy = c_1, \quad y = \frac{c_1}{x}$$

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2\left(\frac{c_1}{y} - 3y\right)}$$

$$-\frac{1}{y}\left(\frac{c_1}{y} - 3y\right)dy = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = -c_1\frac{z^2}{y^2} + 3\cancel{z}\frac{1}{\cancel{z}}$$

1) $\frac{dz}{z^2} = -c_1\frac{dy}{y^2}$

$$-\frac{1}{z} = c_1\cdot\frac{1}{y} + c_2$$

$$\frac{c_1}{y} + \frac{1}{z} = c_2 \; ; \; z = -\frac{1}{\frac{c_1}{y} + c_2} = -\frac{y}{c_1 + c_2 y}$$

2) $z' = -\frac{c_1 + \cancel{c_2 y} - \cancel{y c_2}}{(c_1 + c_2 y)^2} = -\frac{c_1}{(c_1 + c_2 y)^2}$

$$-\frac{c_1}{(c_1+c_2y)^2} = -c_1\cdot\frac{1}{(c_1+c_2y)^2} + \frac{3y^2}{c_1+c_2y}$$

$\boxed{2}$ $(ly-nz)\frac{\partial z}{\partial x}+(mz-lx)\frac{\partial z}{\partial y}=nx-my$

$$\frac{dx}{ly-nz}=\frac{dy}{mz-lx}=\frac{dz}{nx-my}$$

$$\frac{dx-dy}{ly-nz-mz+lx}=\frac{dy-dz}{mz-lx-nx+my}$$

$$\frac{d(x-y)}{l(x+y)-z(m+n)}=\frac{d(y-z)}{m(z+y)-(l+n)x}=\frac{d(x-z)}{(l+m)y-n(z+x)}$$

$$\frac{d(x-y)-d(x-z)}{lx+\cancel{ly}-mz-\cancel{nz}-\cancel{ly}-mz+\cancel{nz}+nx}=\frac{d(y-z)-d(x-z)}{mz+\cancel{my}-lx-\cancel{nx}-ly-\cancel{my}+nz+\cancel{nx}}$$

$$\frac{d(z-y)}{lx+nx-2mz}=\frac{d(y-x)}{}$$

(Отв. 1-й интеграл $\frac{mdx+ndy+ldz}{\underbrace{m(ly-nz)+m(mz-lx)+n(nx-my)}_{=0}}=\gamma\Rightarrow$

$\Rightarrow d(mx+ny+lz)=0\Rightarrow mx+ny+lz=\cancel{0}\,c_1)$;

Второй:

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{\underbrace{x(\ )+y(\ )+z(\ )}_{=0}}=\gamma$$

$\boxed{3}$ $x\overset{u}{\cancel{y}}\frac{\partial u}{\partial x}+uy\frac{\partial u}{\partial y}=-xy$, $u=1$, $xy=1$

I. $\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{uy}=\frac{du}{-xy}$

$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$; $\boxed{\frac{y}{x}=c_1}$

$y=c_1x$

$\frac{dx}{c_1x^2}=\frac{du}{-c_1x^2}$; $\cancel{-\frac{1}{x}=\frac{1}{u}}$

$dx=-du$;

$x=c_2-u$;

$\boxed{c_2=x+u}$

$$
\begin{cases}
y = c_1 x \\
x + u = c_2 \\
u = 1 \\
xy = 1
\end{cases}
\Rightarrow \quad x + 1 = c_2 \ ; \ ; \ x = c_2 - 1 \equiv \bar{c}_2
$$

$$
c_1 x^2 = 1 \quad ; \quad c_1 \bar{c}_2^{\,2} = 1 \ , \ \underline{c_1 (c_2 - 1)^2 = 1}
$$

$$
xy = c_2 - x \ ; \quad c_1 x^2 = c_2 - x
$$

$$
\frac{y}{x} \cdot (x + u - 1)^2 = 1 \ ;
$$

$$
\frac{y}{x} \left(x^2 + 2x(u-1) + (u-1)^2 \right) = 1
$$

II.

$$
\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-xy}
$$

$$
\boxed{\frac{y}{x} = c_1} \ ; \qquad y = c_1 x \ ;
$$

$$
\frac{dx}{xu} = \frac{du}{-c_1 x^2} \ ;
$$

$$
-c_1 x \, dx = u \, du \ ;
$$

$$
-\frac{c_1}{2} x^2 = \frac{u^2}{2} + \cancel{\frac{c_2}{2}} + \bar{c}_2
$$

$$
-c_1 x^2 = \cancel{2}\, u^2 + 2\bar{c}_2 \ ;
$$

$$
-xy = u^2 + 2\bar{c}_2 \ ;
$$

$$
\boxed{u^2 + xy = c_2}
$$

$$
\begin{cases}
y = c_1 x \\
u^2 + xy = c_2 \longrightarrow 1 + xy = c_2 \Rightarrow 1 + x \cdot c_1 x = c_2 \ ; \\
u = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_1 x^2 + 1 = c_2 \ ; \\
xy = 1 \longrightarrow c_1 x^2 = 1
\end{cases}
$$

II. $\dfrac{ydx+xdy+2udu}{yxu+xuy-xy\cdot 2u}=\gamma \Rightarrow \quad xy+u^2=c_2$

(Отв.: $u^2=2-yx$).

$$\left[\begin{array}{l} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0 \\ u\Big|_{z=0}=x^2+y^2 \quad (2\ \text{способа}) \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$$

<u>1-й способ</u>: исключение переменной.

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}\left(\dot{x}_1-a_{12}x_2\right)$$

$$\dot{x}_1=\frac{\ddot{x}_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}\dot{x}_2}{a_{11}}$$

$$\dot{x}_2=\frac{a_{21}\dot{x}_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2$$

$$x_2=\frac{\dot{x}_1}{a_{12}}-\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1$$

$$\dot{x}_2=\frac{\ddot{x}_1}{a_{12}}-\frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{x}_1$$

$$\frac{\ddot{x}_1}{a_{12}}-\frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{x}_1=a_{21}x_1+\frac{a_{22}\dot{x}_1}{a_{12}}-\frac{a_{11}a_{22}x_1}{a_{12}} \quad \Big|\cdot a_{12}(\neq 0)$$

$$\ddot{x}_1-(a_{11}+a_{22})\dot{x}_1+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=0$$

$$\ddot{x}_1-\dot{x}_1\,\mathrm{Tr}A+x_1\,\mathrm{Det}A=0$$

$\boxed{4}$ а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$;

$$\|A\| = -6-6=-12;$$
$$TrA = -1;$$
$$\ddot{x}_1+\dot{x}_1-12x_1=0;$$
$$\lambda^2+\lambda-12=0$$
$$(\lambda+4)(\lambda-3)=0 \quad : -4; 3$$
$$\begin{cases} x_1 = c_1e^{-4t}+c_2e^{3t} \\ x_2 = -6c_1e^{-4t}+c_2e^{3t} \end{cases}$$

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;

$$\ddot{x}_1-10\dot{x}+29x=0$$
$$\lambda^2-10\lambda+29=0$$
$$D=100-\cancel{88}\,116=-16;$$
$$\lambda_{1,2}=\frac{10\pm4i}{2}=5\pm2i;$$
$$\begin{cases} x_1 = (c_1\cos2t+c_2\sin2t)e^{5t} \\ x_2 = (-(c_1+c_2)\cos2t+(c_1-c_2)\sin2t)e^{5t} \end{cases}$$

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

$$\lambda^2-8\lambda+16=(\lambda-4)^2=0;$$
$$\lambda_{1,2}=4;$$
$$\begin{cases} x_1 = c_1e^{4t}+c_2te^{4t} \\ x_2 = -(6c_1+c_2)e^{4t}-6c_2te^{4t} \end{cases}$$

2 <u>Способ</u>. Нахождение собственных..

$$A\vec{h}_1 = \lambda_1 \vec{h}_1$$
$$A\vec{h}_2 = \lambda_2 \vec{h}_2$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \cancel{= h_1 \cdot c_1 +}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то:

— для дикритического узла вид решения такой же;

— для вырожденного узла

$\left(A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}\right)$ собств. вектор только один;

вид решения: ?! (не будем трогать).

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda-3)(\lambda+4)$$

$\underline{\lambda_1 = -4}, \lambda_2 = 3$

$$\begin{cases} (2-\lambda)\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = 0 \\ 6\alpha_1^1 - (\lambda+3)\alpha_2^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = 0 \\ 6\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_2^1 = -6\alpha_1^1$$

$h_1 = \alpha_1^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\alpha_1^1 \neq 0$ (собств. вектор $\neq 0$)

$\underline{\lambda_2 = 3}$; $-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$; $h_2 = \alpha_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$$\|A - \lambda E\| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 21 + 8 = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$$

$\underline{\lambda_1 = 5+2i}$

$$(-2-2i)\alpha_1^1 - 2\alpha_2^1 = 0$$

$$(1+i)\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = 0;$$

$$\alpha_2^1 = -(1+i)\alpha_1^1$$

$$h_1 = \alpha_1^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 5-2i}$

$$(-2+2i)\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 = 0;$$

$$h_2 = \alpha_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \left\{ c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} (\cos 2t + i\sin 2t) + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} (\cos 2t - i\sin 2t) \right\} \cdot$$

$$\cdot e^{5t}; \qquad c_1 \equiv \alpha + i\beta$$

$$c_2 \equiv \alpha - i\beta$$

$$\vec{X} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} (\cos + i\sin) + i\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} (\cos + i\sin) \pm \right.$$

$$\left. + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} (\cos \cancel{+} i\sin) - i\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} (\cos - i\sin) \right\} \exp\ldots \quad \ldots$$

Ср:

$$(1+i)\alpha_1^1+\alpha_2^1$$
$$2\alpha_1^1+(1-i)\alpha_2^1$$ $(1-i)$

Итак, $h_1=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1-i\end{pmatrix}$; $h_2=\bar{h}_1=\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1+i\end{pmatrix}$

$$\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1-i\end{pmatrix}e^{(5+2i)t}+c_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1+i\end{pmatrix}e^{(5-2i)t}$$

Решением также являются:

$c_1 Re(h_1 exp_1)+Im(h_1 exp_1)\cdot c_2$

$c_1 Re(h_2 exp_2)\ldots$

$$h_1 e^{\lambda t}=\begin{pmatrix}1\\-1-i\end{pmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t)e^{5t};$$

$$Re=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos 2t\cdot e^{5t};$$

$$Im=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\sin 2t\, e^{5t}$$

$$h_2 e^{\lambda_2 t}=\begin{pmatrix}1\\-1+i\end{pmatrix}(\cos 2t-i\sin 2t)e^{5t}$$

$$Re=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos 2t\, e^{5t}$$

$$Im=-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin 2t\cdot e^{5t}$$

$$\vec{x}=\left\{c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos 2t+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\sin 2t+\tilde{c}_1\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}\cos 2t-\tilde{c}_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin 2t\right\}e^{5t}=$$

$$= \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} e^{5t},$$

$\alpha = 2C_1$

$\beta = 2C_2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

иссл. на устойчивость и решить.

$$h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} (\cos + i \sin) \cdot e^{5t} = \begin{pmatrix} \cos + i\sin \\ -\cos + \sin - i\cos - i\sin \end{pmatrix} e^{5t}$$

$$Re = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin - \cos \end{pmatrix} e^{5t} \quad ; \quad Im = \begin{pmatrix} \sin \\ -\sin - \cos \end{pmatrix} e^{5t}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} c_1 \cos + c_2 \sin \\ -(c_1 + c_2)\cos + (c_1 - c_2)\sin \end{pmatrix} e^{5t}$$

15.04.2004.
§

Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \text{ — начальная ф-ция} \end{cases}$$

Уравнение характеристик: $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{-u} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -u$,

характеристика: $\underset{\text{первый интеграл}}{x+ut=c} \Rightarrow \underset{\text{общее решение}}{u=\varphi(x+ut)}$.

Рассмотрим, что происходит, если $u(0,x)=\varphi(x)$ — гладкая ф-ция. Например, возьмем ф-цию $\sin x$.

Кстати, если φ — нечетная:

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $u(t,x)$ — решение задачи. Рассмотрим ф-цию ~~φ(t,~~ $u(t,-x) \equiv v(t,x)$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t};\quad u(t,-x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x};\quad u(t,-x)$$

рассмотрим такую комбинацию:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - v\cdot\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - u(t,x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0 \longleftarrow \begin{cases} u(t,x) \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\Big\Downarrow\ x=-\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(-u(t,-\xi)) - (-u(t,-\xi))\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}(-u(t,-\xi)) = 0 \longleftarrow \begin{cases} -u(t,-\xi) \\ \cancel{-u(0,\xi)} \\ -u(0,-\xi) = -\varphi(-\xi \end{cases}$$

Т.о., в силу единственности решения (начальное условие то же), $-u(t,-x) = u(t,x)$, т. е. ф-ция u нечетна по аргументу x.

Предположим, что $\varphi(x)$ — периодическая: $\varphi(x+T) = \varphi(x)$. Тогда $u(t,x+T) = u(t,x)$ (показать).

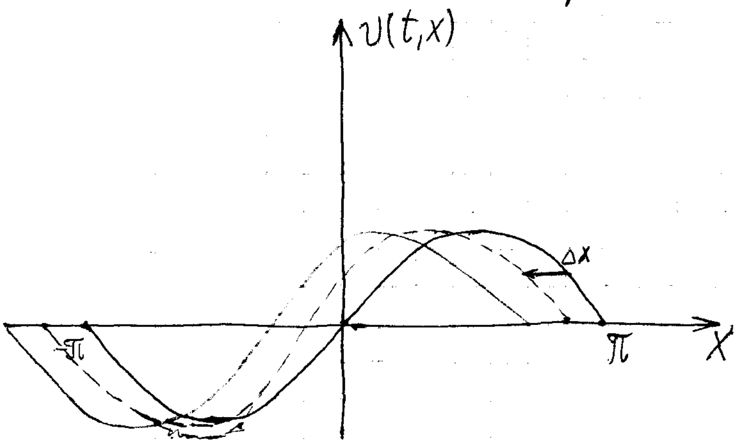
Итак, рассмотрим решение $u(t,x)$ на отрезке $[0;\pi]$ с начальной ф-цией $\varphi(x) = \sin x$:

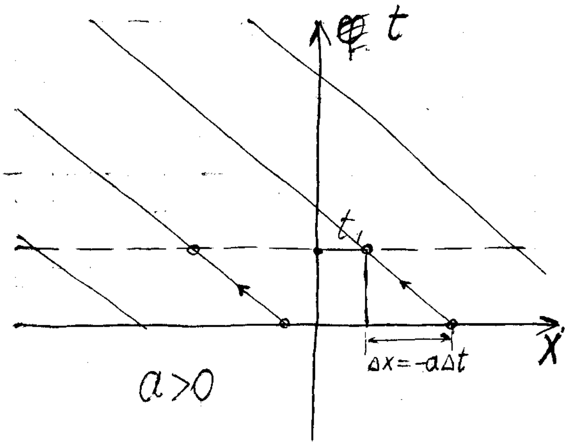
$u(0,x) = \sin x = \varphi(x)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - v\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v(0,x) = \sin x \end{cases}$$

$x + at = c$, $\dfrac{dx}{dt} = -a$;

$v(t,x) = \sin(x+at)$ — решение.



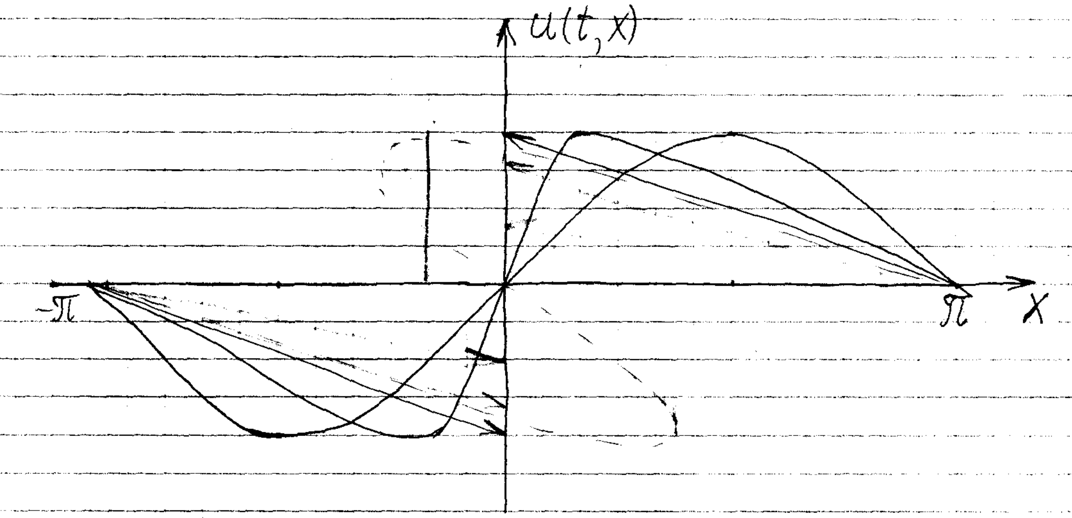


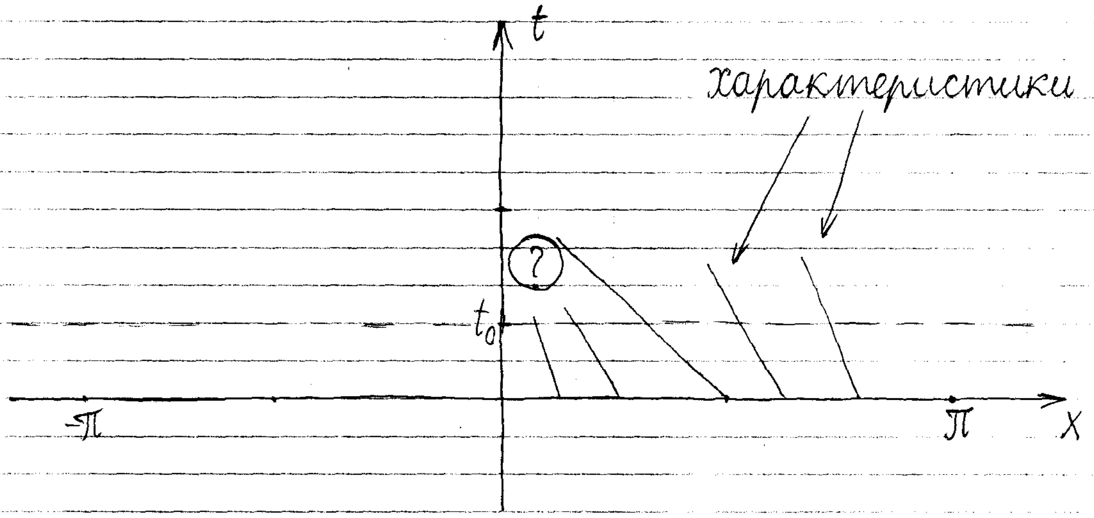
— $t=0$

- - - $t=t_1$

— $t=t_2$

Для исходной нелинейной задачи будем иметь:





$\Delta x = -u\Delta t$, при $t = t_0$ получим разные смещения (в зависимости от u)

$$u_x = \varphi_x (1 + u_x t),$$

$\cancel{\varphi}$, $u_x = \dfrac{\varphi_x}{1 - t\varphi_x}$, при $t = \dfrac{1}{\varphi_x}$ решение терпит разрыв.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)\, dx = \left.\frac{u^2}{2}\right|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$ (физика требует:

$u|_{-\infty} = u|_{+\infty}$);

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)\,dx \equiv S(t),$$

$\frac{\partial}{\partial t} S(t) = 0, \quad S(t) = Const$ (закон сохранения площадей), что позволяет задать некоторую однозначность.

Уравнения математической физики

Классификация

Это линейные уравнения 2-го порядка.

$\boxed{f(x)}$ $\qquad$ $\boxed{f(x_1, x_2),\ f(x_1 \ldots x_n)}$

Будем рассматривать ф-ции 2 переменных.

Общий вид линейного ДУ^2 в частных производных:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (1)$$

Попробуем произвести замену переменных x, y так, чтобы упростить уравнение:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) & (2_1) \\ \eta = \psi(x,y) & (2_2) \end{cases} \qquad \Bigg| \quad \frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$$

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x \\ u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y \end{cases}$$

$$+\left[\begin{array}{l} u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_x \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y \eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \end{array}\right.$$

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} = \bar{F} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x \cancel{\eta}\xi_y + a_{22}\xi_y^2 & (4_1) \\ a_{12} = a_{11}\xi_x \eta_x + \cancel{2}a_{12}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22}\xi_y \eta_y & (4_2) \\ a_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12} \cdot \eta_x \eta_y + a_{22}\eta_y^2 & (4_3) \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \qquad (5)$$

$$a_{11}(dy)^2 + 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \qquad (6)$$

<u>Лемма</u>. $z = \varkappa(x;y)$ – решение (5) $\Big|$ $\Longleftrightarrow$ $\varkappa(x;y) = c$ – первый интеграл (6).

$\boxed{\Rightarrow}$ $\varkappa(x;y)$ – решение(5) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\varkappa(x;y) = c$ – ПИ для (6).

Очевидно, $a_{11}\varkappa_x^2 + 2a_{12}\varkappa_x\varkappa_y + a_{22}\varkappa_y^2 \equiv 0$,

причем ни одна из производных $\varkappa$ не равна 0.

Преобразуем:

$$a_{11}\cdot\left(\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right) + a_{22} = 0;$$

$$a_{11}\cdot\left(-\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\right) + a_{22} = 0;$$

$$(6) \Longleftrightarrow (6'):\ a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0;$$

$$\varkappa(x;y) = c \Rightarrow y = \chi(x, c),$$

$$y'_x = -\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}$$

$\boxed{\Leftarrow}$