I. Если $f(x)$ – линейна: $f(x) = Ax$, $\dot{x} = Ax$, то, очевидно, $a=0$. Если: $\lambda_j(A) = \alpha_j + i\mu_j$ (собств. значения A), и $\forall j: \alpha_j < 0$, <u>то</u>:

положение равновесия асимптотически устойчиво. (т. „а").

II. $f(x)$ – любая. Предположим, что:

$\exists A$ (матрица), $R(x) \equiv f(x) - Ax$ $[\dot{x} = f(x) = Ax + R(x)]$,

и $\exists \varepsilon > 0$, $\exists C$: $\|R(x)\| \leqslant C \cdot \|x\|^{1+\varepsilon}$;

если $\forall j$ $\lambda_j(A) = \alpha_j + i\mu_j$, $\alpha_j < 0$, <u>то</u>

точка покоя a асимптотически устойчива.

В оригинале, Ляпунов доказал, что если $\exists \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$, то теорема II выполнена.

Можно разложить $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2$$

[Смысл ряда Тейлора: любую ф-цию можно с точностью $\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$ приблизить многочленом.]

$$f'(a) = (B_{ij}), \quad \underline{B_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i}$$

$f(a) = 0$;

$f'(a) \cdot (x-a) \equiv Ay$ $\quad (y = x-a)$ $\quad$ (нашли A $\uparrow$)

$\frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2 \equiv R(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} (x_k - a)(x_l - a)$

тогда $\|R(x)\| \leq \varepsilon\, n^2 \cdot K$, K ограничивает $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$.
~~$(x_k - a)(x$~~ В качестве ε здесь можно взять единицу.

Данная теорема наз. „теоремой об исследовании устойчивости по первому приближению (Ляпунова)".

Докажем теорему I.

□ $\lambda_j(A) = \alpha_j + i\mu_j \Rightarrow e^{\alpha_j t}\left\{\begin{matrix}\cos\mu_j t\\ \sin\mu_j t\end{matrix}\right\} \cdot t^{\nu_j - 1}$, $\nu_j = 0, \ldots, s_j - 1$

$\forall j \quad \alpha_j < 0 \Rightarrow \exists \alpha > 0: \quad \alpha_j < -\alpha < 0, [\alpha_j + \alpha < 0]$.

$-\alpha \quad 0$

Очевидно, что каждая из ф-ций базиса может быть оценена т.о.:

рассмотрим $\frac{|u_j|}{e^{-\alpha t}} = t^{\nu_j} e^{(\alpha_j + \alpha)t}$, u_j — j-решение;

и при $t \to \infty$ $\frac{|u_j|}{e^{-\alpha t}} \to 0$, $\cancel{\frac{|\alpha_j|}{e^{-(\alpha_j+\alpha)t}}}$ $\frac{t^{\nu_j}}{e^{-(\alpha_j+\alpha)t}} \to 0$,

и $t^{\nu_j} e^{(\alpha_j+\alpha)t} \leq K$ ~~($\forall$~~ $(\exists T, \forall t \geq T: \ldots < 1$, $\leq K$ на $[0;T])$, или $\underline{|u_j| \leq K e^{-\alpha t}}$.

Возьмем такие $\psi_i(t) = \varphi(t, e_i)$, где в качестве ξ_i взяли репер $e_i = \{0; 0; \ldots 0; 1; 0; \ldots; 0\}$.

Тогда $\varphi(t,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t)$ — решение (1),

$\sum \xi_i \psi_i(t)\Big|_{t=0} = \xi$, ибо $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $\psi_i(0) = e_i$.

Поэтому $\|\varphi(t,\xi)\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot \|\psi_i(t)\| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|\psi_i(t)\|\right) \cdot \|\xi\|_1 \leq$

$\leq n \cdot \|\xi\|_1 \cdot \max\limits_i \|\psi_i(t)\| \leq n \cdot \|\xi\|_1 \cdot K e^{-\alpha t} \cdot n = n^2 \|\xi\|_1 K e^{-\alpha t} \equiv$

$\equiv C\|\xi\| e^{-\alpha t}$.

Т.о., решение $\varphi(t,\xi)$ асимптотически устойчиво:
$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\frac{\varepsilon}{c}: \|\xi\|<\delta \Longrightarrow \|\varphi(t,\xi)\|<\varepsilon$. ■

Докажем, что из сходимости по 1-й норме следует сходимость по остальным:

$\forall \vec{x}: \quad \vec{x}=\sum x_k \vec{e}_k;$

$\|x\| \leq \sum |x_i|\cdot\|\vec{e}_i\| \leq \left(\sum\|\vec{e}_i\|\right)\cdot \max\limits_{1\leq i\leq n} x_i = \underbrace{\left(\sum\|\vec{e}_i\|\right)}\cdot\|x\|,$

не зависит от x.

Т.е. рассмотрели любую норму $\|x\|$.

Теорема.

$\forall j: \quad \lambda_j(A)=\alpha_j+i\mu_j: \quad \alpha_j>0 \Rightarrow$ решение φ неустойчиво (в точке a).

○ Пример.

$\dot{x}=-\sin x$

$x\equiv 0$ — решение;

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots = x+\bar{O}(x^2);$

$\dot{x}=-\sin x = \underset{=}{-}x+\bar{O}(x^2);$

$-1<0$

точка 0 асимптотически устойчива. ●

$\sin x < x \quad (x>0),$

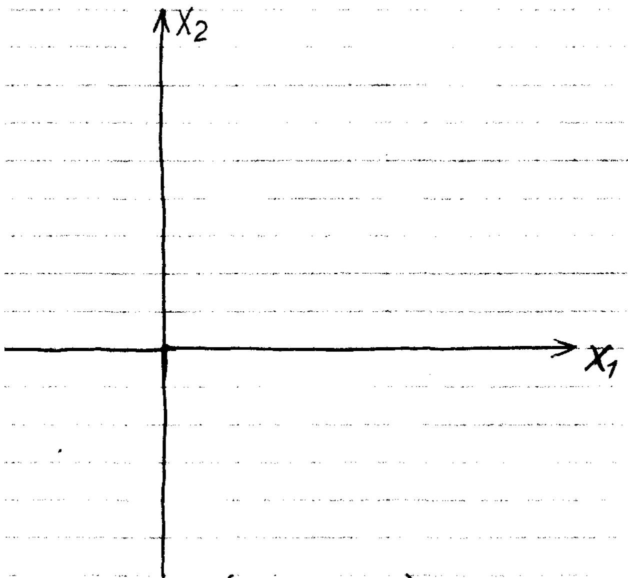
$\frac{\sin x}{x} < 1,$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x; \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x};$

$$1-2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1;$$
$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x^2}{2^2} = \frac{x^2}{2} = \bar{O}(x^2)$$

18.03.2004	Семинар. Фазовые пространства.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1(t), x_2(t); \quad \underset{\text{траектория}}{x_2 = x_2(x_1)}$$



совокупность фазовых траекторий — <u>фазовый портрет</u>.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad |A-\lambda E| = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \lambda(a_{11}+a_{22}) =$$
$$= |A| - \lambda(a_{11}+a_{22}) + \lambda^2 = 0$$

$$-\lambda^2 + \lambda(a_{11}+a_{22}) = a = |A|$$
$$\lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + |A| = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4|A|}}{2} = \frac{trA \pm \sqrt{(trA)^2-4|A|}}{2}$$

$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda\, trA+|A|=0.$

Применим т. Виета:

$\lambda_1+\lambda_2 = trA$

$\lambda_1\lambda_2 = \det A$

Условие для точки покоя:

$$A\bar{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0 \end{cases};$$

Данная однородная система имеет решение:

— при $\det A\neq 0$ [redacted] тривиальное решение (только!) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

— $\det A=0$: тривиальное решение.

В дальнейшем не будем рассматривать второй случай. (См.: Эльсгольц; Эрроусмит, Плейс).

Характер точки покоя зависит от собственных значений матрицы A.

Пусть $a_{ij}\in\mathbb{R}$. Рассмотрим возможные случаи:

1. $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$:

   а) $\lambda_1\neq\lambda_2$ < $++_{\text{неуст.}}$, $--_{\text{уст.}}$, узел; $+-$, седло

   б) $\lambda_1=\lambda_2$

2. $\lambda_1=\alpha+i\beta=\bar{\lambda}_2$

$\lambda_1=\lambda_2$ < вырожд. узел ⇐ $A=$; дикритич. узел ⇐ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ — фокус ($\alpha<0$ - уст., $\alpha>0$ - неуст).
— центр ($\alpha=0$)

Рассмотрим матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}; \; |A-\lambda E| = (\alpha-\lambda)^2+\beta^2 = \alpha^2-2\alpha\lambda+\lambda^2+\beta^2 =$$

$$= \lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2=0; \quad \lambda_{1,2} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2-4\alpha^2-4\beta^2}}{2} =$$

$$= \alpha \pm i\beta \; ;$$

$\vec{X}=\vec{0}$ — фокус или центр

$h_1 = ?\quad h_2 = ?$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2; & 1 \\ \dot{x}_2 = \beta \cancel{\alpha} x_1 + \alpha x_2 & (i) \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = (\alpha+i\beta)x_1 + (i\alpha-\beta)x_2 = $$
$$= (\alpha+i\beta)x_1 - (\beta - i\alpha)x_2;$$

$$\dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = (\alpha+i\beta)x_1 + i(\alpha+i\beta)x_2 = (\alpha+i\beta)(x_1+ix_2);$$

$$x_1+ix_2 \equiv z;$$

$$\dot{z} = (\alpha+i\beta)z; \quad z = re^{i\varphi}; \quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}; \; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$$

$$\varphi \cancel{re^{i\varphi}} = (\alpha+i\beta)\cancel{re^{i\varphi}}, \quad \left[\begin{aligned} &\varphi = \alpha+i\beta, \; x_2 = x_1 tg(\alpha+i\beta) \\ &r = \sqrt{x_1^2(1+tg^2(\alpha+i\beta))} = \\ &= x_1^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha+i\beta)} = \frac{x_1^{\cancel{2}}}{\cos\varphi} \end{aligned}\right.$$

$$\varphi r = (\alpha+i\beta)r$$

$$r(\varphi) = \frac{x_1^{\cancel{2}}}{\cos\varphi}$$

$$\cancel{r(\varphi) = \frac{x_1}{e^{\alpha}}}$$

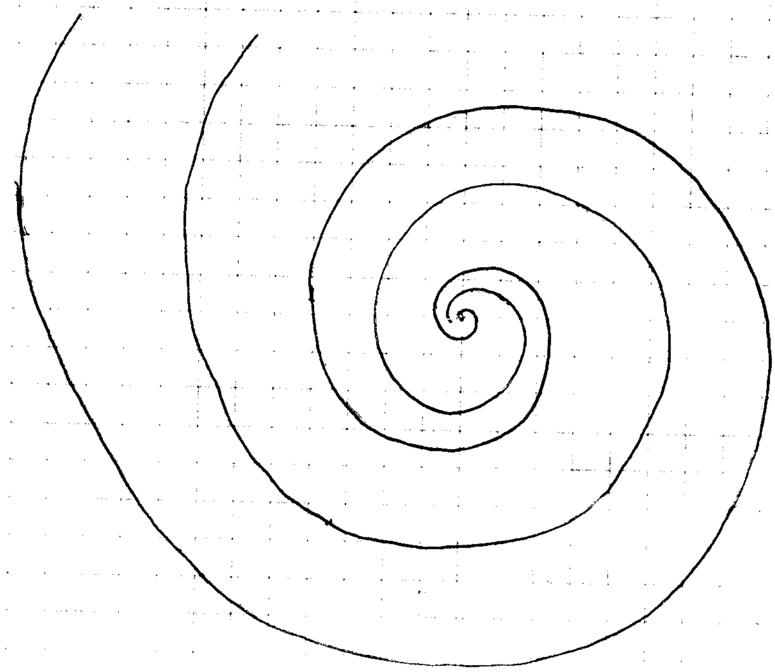
$$\frac{d}{dt}(re^{i\varphi}) = (\alpha+i\beta)re^{i\varphi};$$

$$(\dot{r}+ir\dot{\varphi})\cancel{e^{i\varphi}} = (\alpha+i\beta)r\cancel{e^{i\varphi}}; \quad \dot{r} + \underline{ir\dot{\varphi}} = r\alpha + \underline{ir\beta};$$

$$\begin{cases}\dot\varphi=\beta\\ \dot r=\alpha r\end{cases};\qquad \varphi=\beta t+\varphi_0,\ \cancel{t=\frac{\varphi}{\beta}}\ \ t=\frac{\varphi-\varphi_0}{\beta}\qquad r=ce^{\alpha t}$$

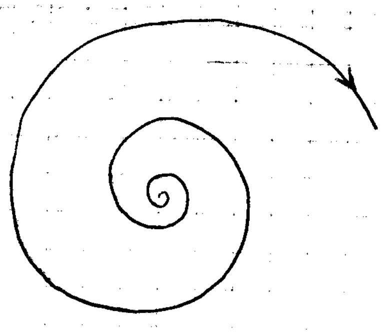
$$r(\varphi)=ce^{\alpha\frac{\varphi-\varphi_0}{\beta}}=\tilde c e^{\alpha\varphi/\beta}=ce^{\frac{\alpha\varphi}{\beta}}$$ — логарифмич. спираль

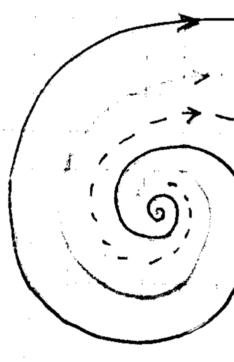
$r(\varphi)=k\varphi$ (Архимедова спираль)



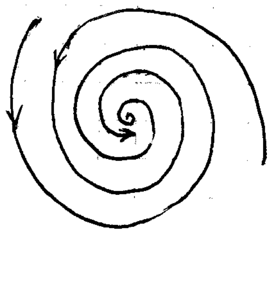
При $\beta>0$:

— $\alpha>0$

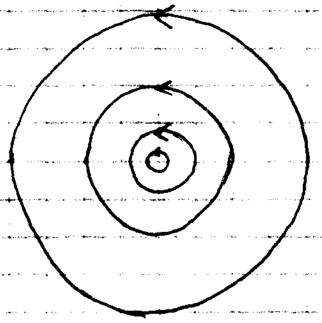




— $\alpha<0$



— $\alpha = 0$



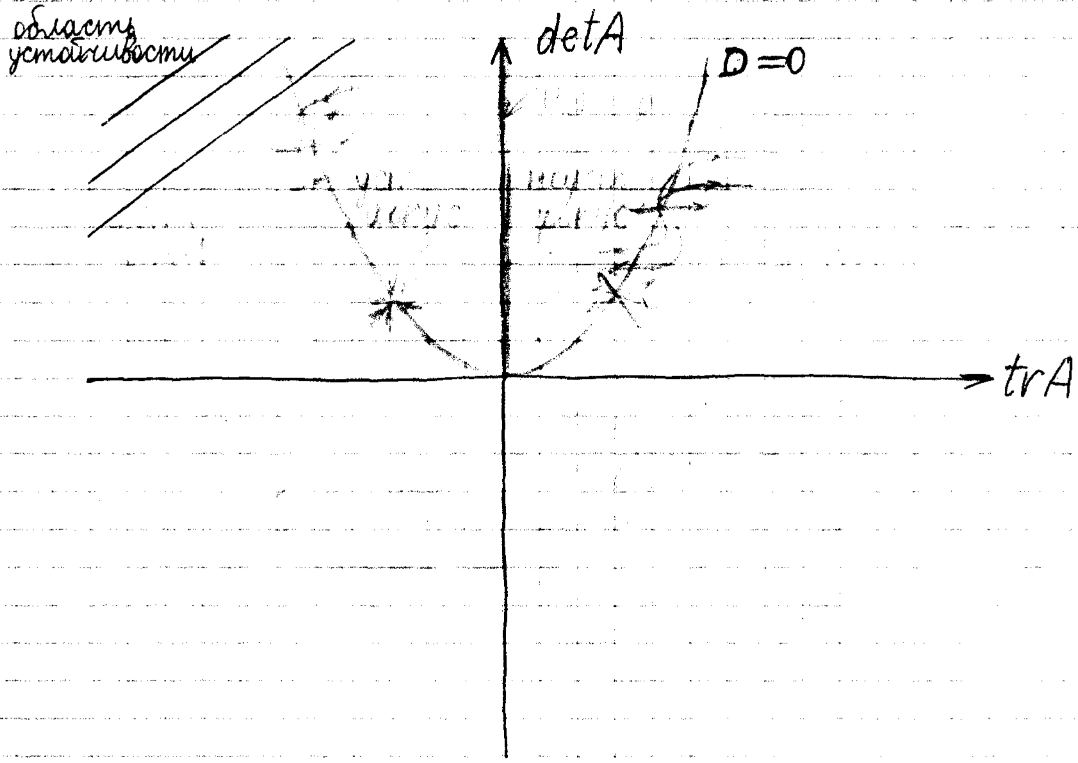
Теперь рассмотрим возможные исходы в зависимости от $|A|$ и trA.

$$\lambda^2 - \lambda \cdot trA + |A| = 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = |A|$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = trA$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4|A|}}{2}$$



Теория графов

Теорема Харари-Коулсона-Сакса

Тринайстич: „Теория Хюккеля и топология. Мир, 18. стр. 14-46, „полуэмпирические методы расчета..."

И. С. Дмитриев. „Молекулы без химических связей.

Характеристический полином: $P_G(\lambda) = det(A-\lambda E)\cdot(-1)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k}$.

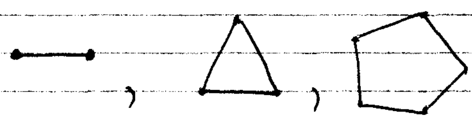
$$a_k = \sum_{S\in S_k} (-1)^{c(S)} 2^{r(S)},$$

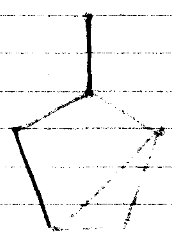
$c(S)$ — число компонент в саксовом графе S

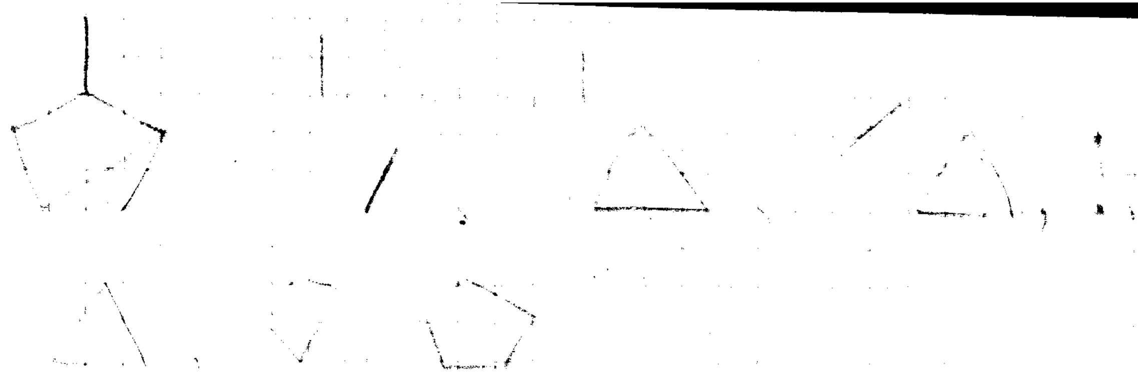
$r(S)$ — число циклов в S

S_k — мн-во всех саксовых графов с k вершинами.

Поясним понятия саксового графа:







$a_0 \equiv 1 \quad (S_1 = \varnothing$ (если нет петель)).

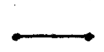
$a_1 = -\sum_1^n \lambda_i$ по т. Виета; $a_1 = 0$;

граф без петель $\Rightarrow \sum \lambda_i = 0$

$a_2 = |7\text{ пар}| = 7 \cdot (-1)^1 \cdot 2^0 = -7$;

$a_2 = -n$ (число ребер).

Рассмотрим некоторые примеры:



$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -1 \end{aligned}\right| \Rightarrow P_G(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -2 \\ S_3 &= \varnothing,\ a_3 = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow P_G(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda$$

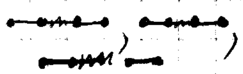
$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -3 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= 1 \end{aligned}\right| \quad P_G(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$$

$a_0=1$

$a_1=0$

$a_2=-4$

$a_3=1$



$a_4=3\cdot(-1)^2\cdot 2^0=3$

$a_5=0$

$P_G(\lambda)=\lambda^5-4\lambda^3+3\lambda$

$\lambda=0,\ \pm1,\ \pm\sqrt{3}$

$x=2\cos\frac{\pi k}{n+1}$

$$x=\left[\begin{array}{l}2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\\ 2\cos\frac{2\pi}{6}=1\\ 2\cos\frac{3\pi}{6}=0\\ 2\cos\frac{4\pi}{6}=-1\\ 2\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

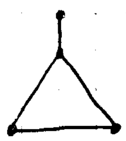
$a_0=1$

$a_1=0$

$a_2=-3$

$a_3=-2$

$P_G(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2$



$a_0=1$

$a_1=0$

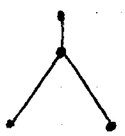
$a_2=-4$

$a_3=-2$

$a_4=1$

$P_G(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^2-2\lambda+1=$

$=(\lambda+1)(\lambda^3-\lambda^2-3\lambda+1)$



$a_0=1$

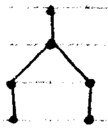
$a_1=0$

$a_2=-3$

$a_3=0$

$a_4=0$

$P_G(\lambda)=\lambda^4-3\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2-3)$



$a_0 = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = -5$

$a_3 = 0$, $P_G(\lambda) = \lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 - 1$

$a_4 = 5$ $\quad t^3 - 5t^2 + 5t - 1 = 0$

$a_5 = 0$

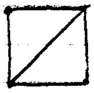
$a_6 = -1$

$a_1 = 0$

$a_2 = -4$ $\quad P_G(\lambda) = 2\cos\frac{2\pi k}{n}$

$a_3 = 0$

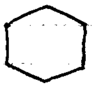
$a_4 = 0$



$a_2 = -5$

$a_3 = -4$ $\quad P_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$

$a_4 = 0$



$a_0 = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = -6$

$a_3 = 0$

$a_4 = \cancel{3\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 2 = 6}\ 9$

$a_5 = 0$

$a_6 = -2 - 2\cdot\cancel{1} = -\cancel{1}\ -4$

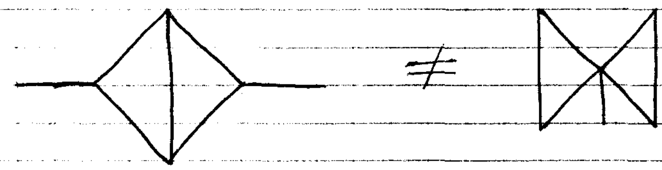
$$\begin{array}{l} t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0 \quad \underline{|\, t-1} \\ \underline{t^3 - t^2} \qquad\qquad\qquad t^2 - 5t + 4 \\ \quad -5t^2 + 9t - 4 \\ \quad \underline{-5t^2 + 5t} \\ \qquad\quad 4t - 4 \end{array}$$

$t^2 - 5t + 4 = t^2 + (t-1)(t - 4)$, (± 1) ± 2

λ: $\pm 1, \pm 1, \pm 2$

ЭКЗ

Изоспектральные графы:



25.03.2004. §6

Первые интегралы (характеристики)

Рассмотрим систему ДУ:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \qquad (1)$$

и начальные условия:

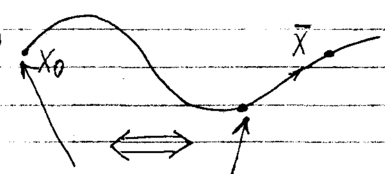
$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}^0. \qquad (2)$$

Если $\exists \ \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_i}$, то решение системы существует и единственно (можно потребовать и другое).

Реш-я y_i имеют вид (нормальный):

$$\begin{cases} y_1(x) = \varphi_1(x_0, x, y_1^0, \dots, y_n^0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = \varphi_n(x_0, x, y_1^0, \dots, y_n^0) \end{cases} \qquad (3)$$

$\vec{y}(x_0) = \vec{y}^0$



$y_k(x) = \varphi_k(x_0, x, y_1^0, \dots, y_n^0)$

две точки эквивалентны,

причем в силу т. существования и единственности, траектория единственна.

В соображениях физики (механики), положение частицы, её траектория случайна, вероятностна.

(Это касается микромира).

В точке $\overline{x}$ задача имеет, притом единственное, решение:

$$\begin{cases} y_1(x) = \varphi_1(\overline{\overline{x}}_0, x, \overline{\overline{y}}_1^0, \ldots, \overline{\overline{y}}_n^0) \\ \cdots \\ y_n(x) = \end{cases}$$

Теперь решим нашу систему:

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

с начальными условиями $\overline{y}(\overline{x}) = \overline{\overline{y}}$.

Т.о., $A \to B \Leftrightarrow B \to A$.

Для нач. усл. $\overline{x}$ получим такое решение:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = \varphi_1(\overline{x}, x_0, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) = y_1^0 \\ \cdots \\ y_n(x_0) = \qquad = y_n^0 \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} y_1(\overline{x}) = \varphi_1(x_0, \overline{x}, y_1^0 \ldots y_n^0) \\ \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^0 = \varphi_1(\overline{x}, x, \overline{y}_1 \ldots \overline{y}_n) \\ \end{cases}$$

Обозначим начальные условия:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_0, x, c_1, \ldots, c_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_0, x, c_1, \ldots, c_n) \\ y_n = \varphi_n(x_0, x, c_1 \ldots, c_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x, y_1 \ldots y_n) = c_1 \\ \varphi_2(x, y_1 \ldots y_n) = c_2 \\ \cdots \\ \varphi_n(x, y_1 \ldots y_n) = c_n \end{cases} ?$$

(„x" пропустили)

Если в φ_i подставить решения $y_1 \ldots y_n$, то $\varphi_i = Const$.

Каждая из ф-ций φ_i наз. <u>первым интегралом</u>.

Опр. Первым интегралом φ_i наз. такая ф-ция, что:

1) не есть Const

2) $\varphi_i \equiv Const$, если в φ_i подставить решения ДУ в.

Задача Коши и набор первых интегралов эквивалентны. Набор из n первых интегралов наз. <u>общим интегралом</u>.

Дадим второе, эквивалентное определение первого интеграла:

$$(4)\ C = \varphi(x, y_1 \dots y_n) - \text{первый инт.} \iff \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial y_k} \cdot f_k(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (5)$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Дано: $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ — первый интеграл

Доказать: (5)

Подставим решения: $\varphi(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \equiv C$;

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \underbrace{\frac{d\varphi}{dx}}_{\text{полная производная}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \underbrace{\dots\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x}}_{\text{сумма}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\cdot\frac{dy_k}{dx} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\cdot f_k(x, y_1 \dots y_n)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Дано: (5)

Доказать: (4)

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1 \ldots y_n) \\ \ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{f_1} = dx \\ \ldots \\ \frac{dy_n}{f_n} = dx \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n} = dx = \frac{dx}{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy_1}{\Psi f_1} = \frac{dy_2}{\Psi f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{\Psi f_n} = \frac{dx}{\Psi}$$

$$\begin{cases} y_1 \equiv x_1 \\ \ldots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

$$\Psi f_1 = X_1(x_1 \ldots x_n)^{x_{n+1}}; \ldots, \Psi f_n = X_n, \quad x = x_{n+1}$$

$\Psi = X_{n+1};$

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}} \;—$$

Система ДУ в симметричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{X_1}{X_2} = f_1 \\ \dfrac{dx_2}{dx_3} = \dfrac{X_2}{X_3} = f_2 \\ \ldots \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dx_n} = f_{n+1} \end{cases}$$

— свобода в выборе независимой переменной.

Примеры

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

Говорят, что система n первых интегралов <u>независимая</u>, если в якобиане найдется минор (квадратная матрица) n-го порядка, не равный нулю:

$$J = \frac{\mathcal{D}[\varphi_1 \ldots \varphi_n]}{\mathcal{D}[x, y_1 \ldots y_n]} = \begin{array}{cl} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}}_{n-1} & \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right] n \end{array}$$

Справедлива <u>теорема</u>:

Если для системы неявных уравнений в области X минор якобиана k порядка не равен нулю, то можно в X однозначно выразить k переменных через остальные.

$F(x,y)=0$

$$J=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\quad \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{\neq 0}\right) \Rightarrow$$ y можно выразить через x.

$(y\equiv \Psi(x))$.

<u>При этом (Якоби):</u> $y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$

Итак, найдем систему независимых первых интегралов для системы:

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=-\frac{dz}{xy}$$

Найдем интегрируемые комбинации:

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}\Leftrightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Leftrightarrow d\ln|x|=d\ln|y|$$

$$\Leftrightarrow d\ln\left|\frac{x}{y}\right|=0;\ \Leftrightarrow \ln\frac{x}{y}=c;\ \boxed{\frac{y}{x}=c_1}.$$

Предположим:

$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_s}{b_s}=t$. Тогда, для $\forall k_i$: $k_1,k_2,\ldots,k_s$:

$$\frac{k_1a_1+\ldots+k_sa_s}{k_1b_1+\ldots+k_sb_s}=t$$

$$\frac{k_1(a_1-tb_1)+\ldots+k_s(a_s-tb_s)}{k_1b_1+\ldots+k_sb_s}=0=\frac{k_1a_1+\ldots+k_sa_s}{k_1b_1+\ldots+k_sb_s}-t;$$

Итак, $k_1=y,\ k_2=x;$

$$\frac{ydx+xdy}{2xyz}[=t]=\frac{dz}{-xy};$$

$$\frac{ydx+xdy}{2z}=-dz=\frac{d(xy)}{2z}=-dz;$$

$$d(xy)=-2zdz=-d(z^2)=d(-z^2);$$

$$\boxed{z^2+xy=C_2}.$$

$$\begin{cases} y = C_1 x \\ z = \pm\sqrt{C_2 - C_1 x^2} \end{cases}$$

Проверим независимость J:

$$J = \begin{pmatrix} -y/x^2 & 1/x & 0 \\ y & x & 2z \end{pmatrix};$$

$\det = 2\frac{z}{x} \Rightarrow$ в области $x \neq 0$ можно найти явные выражения $y(x), z(x)$.

$(x \neq 0 \Rightarrow \det \neq 0)$

Можно поступить иначе:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-xy}$$

$$-y\,dx = z\,dz$$

$$-2\underline{\underline{C_1}}\,x\,dx \ldots$$

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$$

$$\frac{dx-dy}{y+z-x-z} = \frac{dz}{x+y}$$

$$-\frac{dx-dy}{x-y} = \frac{dz}{x+y}$$

$$-\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{x+y};$$

$$\frac{dz-dy}{x+y-x-z} = \frac{-d(y-z)}{y-z} = \frac{-d(x-y)}{x-y}$$

$$\ln|y-z| = \ln|x-y| + \ln|c|$$

$$y-z = c(x-y)$$

$$z = -cx+cy+y = c_1x + c_2y$$

$$\boxed{\frac{y-z}{x-y} = c}$$

$$\frac{dx-dy}{y+z-x-z} = \frac{dy-dz}{x+z-x-y}$$

$$\frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dy-dz}{z-y}$$

Найдем второй первый интеграл:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy-dz}{z-y}, \quad \frac{dy}{x+z} = \frac{dx-dz}{z-x},$$

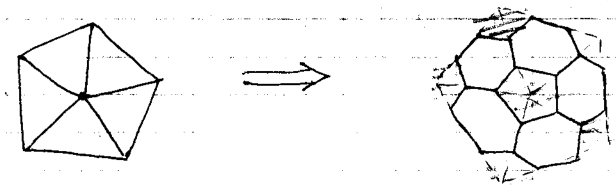
$$\frac{d(y-z)}{y-z} = \frac{d(x-z)}{x-z},$$

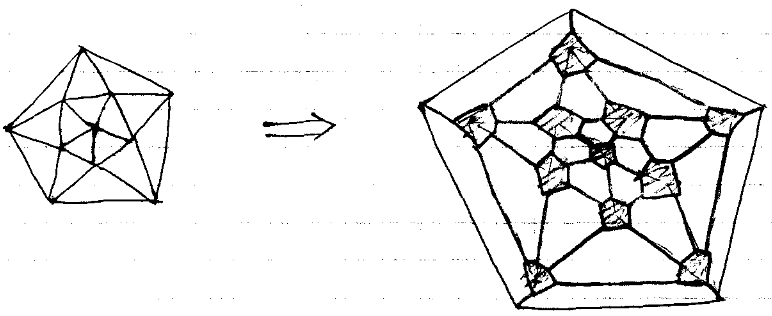
$$\ln\frac{|y-z|}{|x-z|} = c \equiv \ln|\bar{c}|;$$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{y-z}{x-z} = \bar{c}}$$

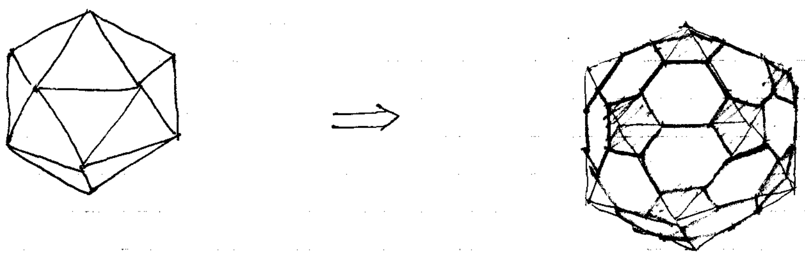
Семинар

C_{60} граф — усеченный икосаэдр.





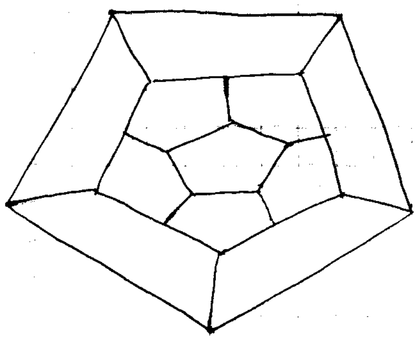
(leapfrog-преобразование)

.

$\Rightarrow C_n$: n кратно 60 или 60+20 – семейство сферически симметричных фуллеренов.

Граф Шлегеля

Развертка графа додекаэдра на плоскость.



(канонический вид графа Шлегеля).

Переход к высшим многогранникам:

T (truncation) – усечение,

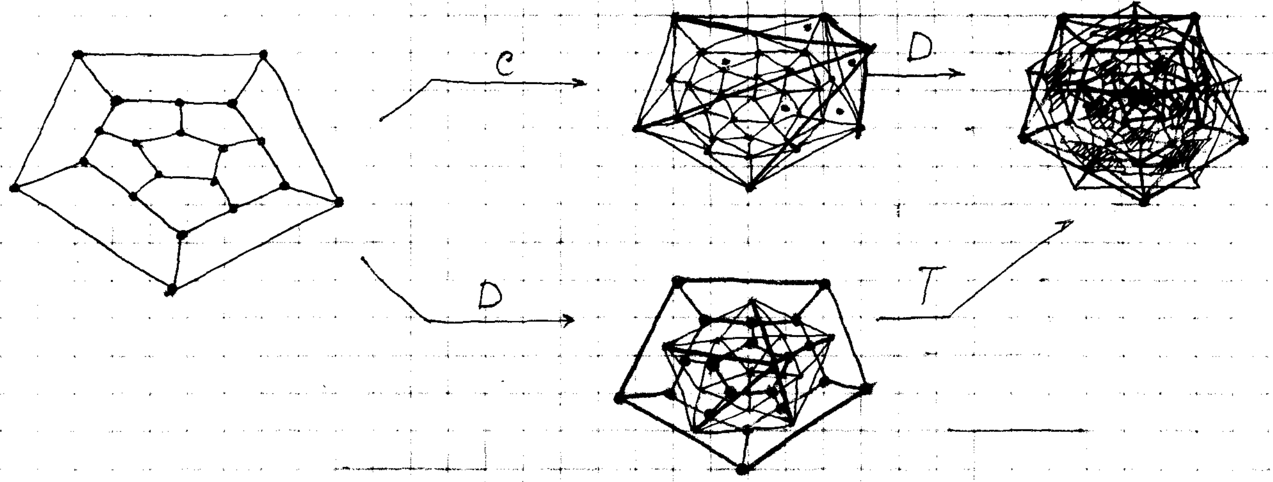
C (capping) – разбиение на треугольники (триангуляция)

D (dualization) – дуализация

додекаэдр $\xrightarrow[2.\,D]{1.\,C}$ C_{60}

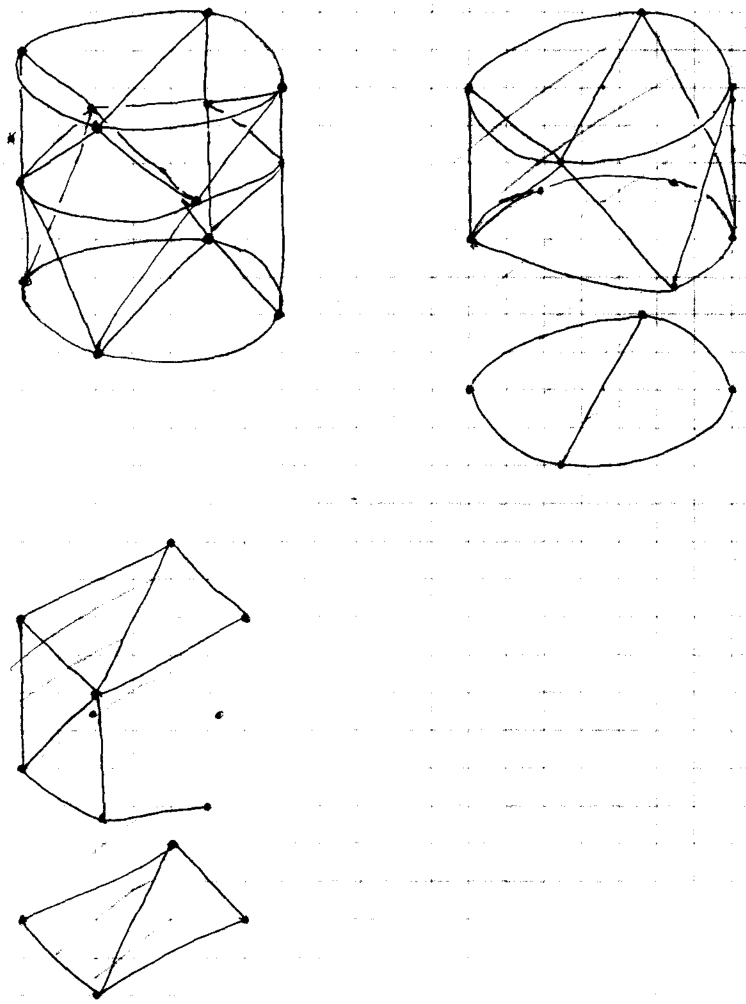
додекаэдр $\xrightarrow{D}$ икосаэдр $\xrightarrow{T}$ C_{60}

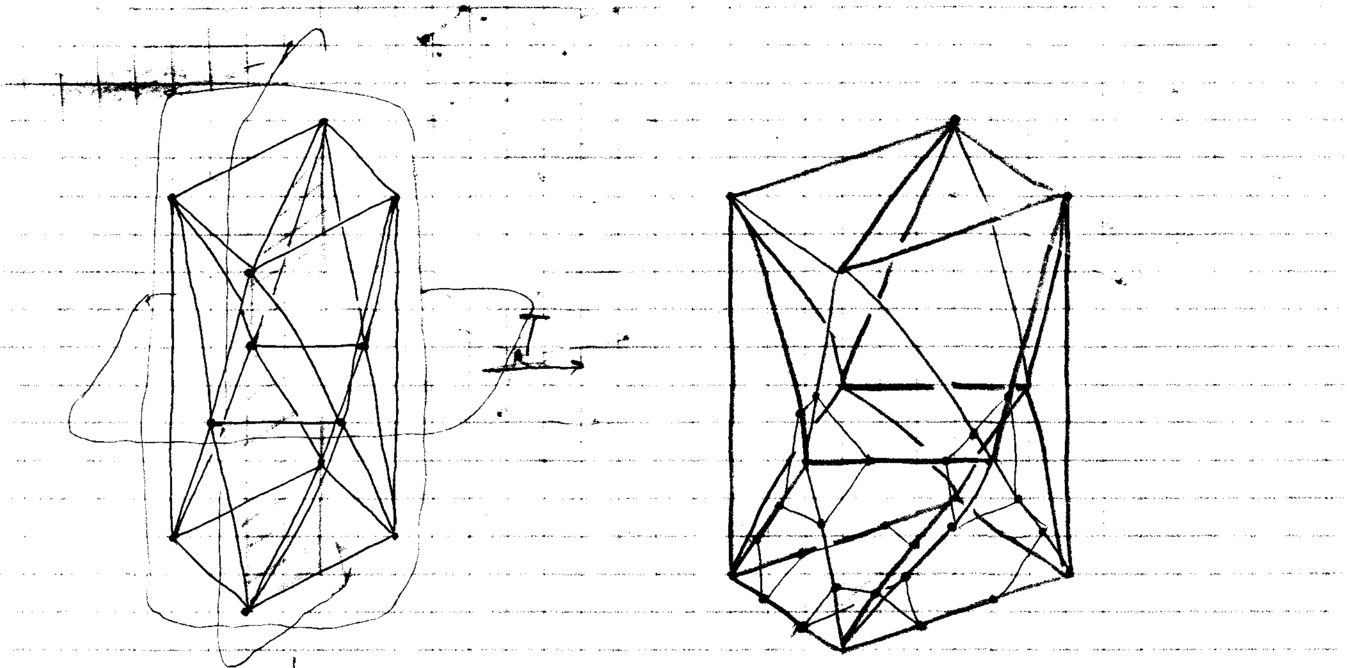
Ср.:



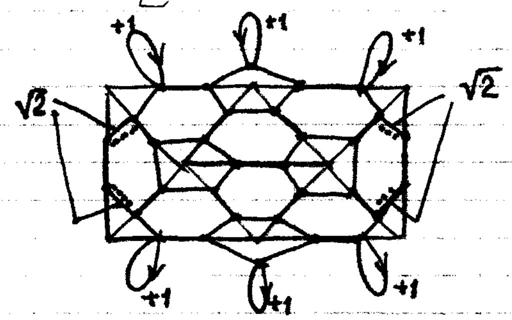
$DCG = TDG$, G - граф додекаэдра.

Граф икосаэдра:





$\xrightarrow[\Sigma]{T}$ G^+:



1.04.2004.
§7

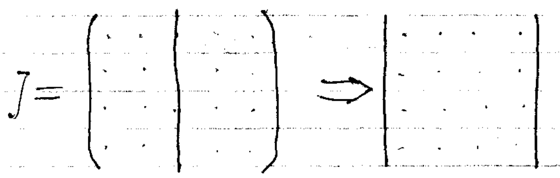
Система ДУ в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1 \dots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1 \dots x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1 \dots x_n)} \Leftrightarrow (n-1) \text{ уравнение}$$

Можно найти $(n-1)$ первых интегралов:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = C_2 \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1} \end{cases} \quad \text{(общий интеграл).}$$

Независимыми первые интегралы называются, если в якобиане $J = \frac{D(\varphi_1 \dots \varphi_{n-1})}{D(x_1 \dots x_n)}$ найдется минор $(n-1)$-порядка, не равный нулю.



minor

Первый интеграл φ есть такое соотношение, что если подставить в φ решения ДУ (системы), то $\varphi \equiv Const$.

Возьмем x_m в качестве независимой переменной. Получим решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_m) \\ x_2 = x_2(x_m) \\ \dots \end{cases}$$

При подстановке этого решения получим φ — сложную ф-цию от x_m, где φ — ~~первый~~ полный интеграл.

Если же теперь якобиан $J_k \neq 0$, то тогда можно полный интеграл разрешить относительно x_i.

Запишем, напоминая, критерий первого интеграла:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x_1,\dots,x_n)=c - \\ \text{первый интеграл}\end{array}\right| \Leftrightarrow d\varphi = 0 \qquad (\varphi(x_1(x_m),\dots,x_n(x_m)).$$

$$\Updownarrow$$

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} X_i(x_1,\dots,x_n)\cdot\lambda,$$

где $\lambda = \dfrac{dx_1}{X_1} = \dfrac{dx_2}{X_2} = \dots = \dfrac{dx_n}{X_n}$.

Итак,

φ — первый интеграл $\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(x_1,\dots,x_n)\cdot\lambda\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0$

Уравнения в частных производных первого порядка

Для начала рассмотрим однородное ДУ 1-го порядка:

введем оператор $X[u]$, где $u = u(x_1 \dots x_n)$: $(u(\vec{x}))$

$X[u] \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(\vec{x})\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, где X_i — известные ф-ции, как бы коэффициенты. Очевидно, $X[u]$ линеен как по X_i, так и $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Запишем теперь уравнение:

$$X[u] = 0 = \sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

линейное ДУ 1-го порядка.

Решение этого ДУ — такая ф-ция $\bar{u}=\bar{u}(x_1 \dots x_n)$, которая: $X[\bar{u}]=0$, $\forall x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Как решить данное ДУ?

Предположим, что найдено $(n-1)$ соответствующих первых интегралов для ДУ, записанного в симметричной форме:

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi_1(\vec{x}) = c_1 \\ \dots \\ \varphi_{n-1}(\vec{x}) = c_{n-1}. \end{cases}$$

Тогда каждое φ_i — решение уравнения (ср.: необходимое и достаточное условие...).

<u>Теорема 1</u>. Любой первый интеграл симметричной системы (2) есть решение уравнения (1), при условии, что φ_i имеют частные производные.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}$. Тогда:
$\tilde{u}(\vec{x}) = \Phi(\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\vec{x}))$

есть решение уравнения (1).

■ Подставим Φ в $X[\,]$:

$$X[\Phi] = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^{n} X_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \sum_i X_i \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{j}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \underbrace{X[\varphi_j]} = 0.$$

■

Теорема 3. Пусть $u(X)$ — решение уравнения (1). Тогда существует такая функция $\Phi = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$:

$\tilde{u}(X) \equiv \Phi(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$, притом Φ — единственна.

Φ (по т. 2,3) — исчерпывающее решение уравнения (1).

Доказательство:

По условию, $X[\tilde{u}] = X_1 \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + X_2 \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} + \ldots + X_n \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}$.

С другой стороны (т. 1):

$$\begin{cases} X_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \varphi_n} = 0 \\ \ldots \\ X_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + X_n \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} = 0 \\ X_1 \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \ldots + X_n \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

(подставили первые интегралы)

Рассмотрим данную систему как систему линейных однородных уравнений с n уравнениями и n неизвестными.

Поскольку не все X_i равны нулю, то:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 = \frac{\mathcal{D}[\tilde{u}, \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}]}{\mathcal{D}[x_1 \ldots x_n]}.$$

В теории неявных ф-ций доказано, что:

1. если имеется n ф-ций, якобиан которых в области $\{x_1 \ldots x_n\} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ равен нулю, то между этими ф-циями есть функционально зависимы:

$$\exists ! \tilde{F}(\tilde{u}, \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}) \equiv 0.$$

2. если в якобиане J_F найдется не равный нулю минор $(n-1)$ порядка, то оставшуюся ф-цию можно выразить через все остальные: (

$$J_F = \frac{\mathcal{D}[\tilde{u}, \varphi_1 \ldots \varphi_n]}{\mathcal{D}[x_1 \ldots x_n]}$$

Вычеркнем строку $\tilde{u}$ и столбец x_m ?? такой, ??
чтобы ф-ции φ были независимыми (см. выше):

$$\tilde{u} = \Phi(\varphi_1, \ldots \varphi_n).$$

$\blacksquare$

Итак, общий вид решения уравнения (1) может быть записан так:

$$\boxed{\vec{u}(x) = \Phi(\varphi_1 \ldots \varphi_n)}.$$

Далее рассмотрим квазилинейное уравнение:

$$X[u] = \sum X_i(\vec{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = R(\vec{x}, u) \quad (7).$$

Предположим, что имеется неявная функция: $V(u, \vec{x}) = 0$. Если в области Ω существуют частные производные:

$\frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}$, которые непрерывны и $\frac{\partial V}{\partial u} \not\equiv 0$, то:

существует такая ф-ция F: $u = F(x)$,
и притом существуют частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, притом:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{(\partial V/\partial x_i)}{-(\partial V/\partial u)}.$$

Попробуем искать решение (7) в виде:
$V(\vec{u}, \vec{x}) = 0$, где „u" есть решение (7), т.е. дифференциальную задачу сведем к алгебраической;
Подставим $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в (7):

$$-\frac{\partial V}{\partial u} \cdot \tilde{X}[u] = \sum_{i}^{n} \tilde{X}_i(\vec{x}, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = -R(\vec{x}, u) \cdot \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\tilde{X}[V] = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i(\vec{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_i} + R(\vec{x}, u) \cdot \frac{\partial V}{\partial u};$$

(ср. с (1)):

$$u \to V$$

$$x_1, \ldots, x_n \to x_1, \ldots, x_n, u$$

Решая далее, составим систему:

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x}, u)} = \frac{dx_2}{X_2(\vec{x}, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(\vec{x}, u)} = \frac{du}{R_n(\vec{x}, u)}$$

Составим первый интеграл (n штук):

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u) = c_1 \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u) = c_n \end{cases}$$

Теперь: V — любая ф-ция первых интегралов:
$V(\varphi_1(\vec{x}, u) \ldots \varphi_n(\vec{x}, u)) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u(\vec{x})$ уже известно как найти, см. выше.