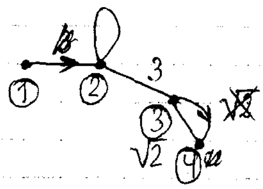
Отв.: $(\lambda^4-5\lambda^2-4\lambda)$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

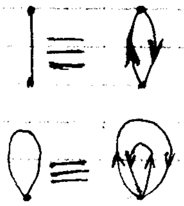
$P_G(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-4)$ $\Rightarrow$ факторизованный полином

Петли, кратные ребра

3



$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&2&3&0\\0&3&0&(1+\sqrt2)\\0&0&\sqrt2&0\end{pmatrix}$$



Учет зеркальной симметрии

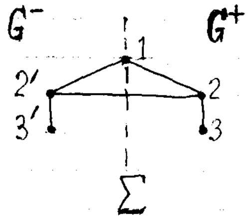
Правило Мак-~~К~~лелланда. (Mc Clelland)

Пусть имеется граф, симметричный относительно плоскости Σ.

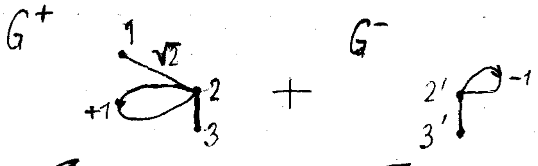
Rules:

1. Vertices which ~~are~~ lie on the symmetry plane are included in G^+
2. If a vertex μ lies in Σ and ν does not, then $a^+_{\mu\nu}$ is $a_{\mu\nu}\cdot\sqrt2$
3. $a^\pm_{\mu\nu}=a_{\mu\nu}\pm a_{\mu\nu'}$ where ν' is the symmetry partner of ν with respect to Σ.

4



$\Rightarrow$



$a_{22'}=1$

$a^+_{22}=\underset{0}{a_{22}}+\underset{1}{a_{22'}}$, $a^-_{22}=a_{22}-a_{22'}$

$$G^+;\quad A_{G^+}=\begin{pmatrix}0&\sqrt2&0\\ \sqrt2&1&1\\ 0&1&0\end{pmatrix},\quad A_{G^-}=\begin{pmatrix}-1&1\\ 1&0\end{pmatrix}$$

$$P_{G^+}(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&\sqrt2&0\\ \sqrt2&1-\lambda&1\\ 0&1&-\lambda\end{vmatrix};\ \cancel{\ }=\lambda^2(1-\lambda)+\lambda-2\lambda=\lambda^2-\lambda^3-\lambda=$$

$$=\lambda^3-\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda^2-\lambda+1)$$

$$P_{G^-}(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\ 1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-1$$

$\lambda_1=0$

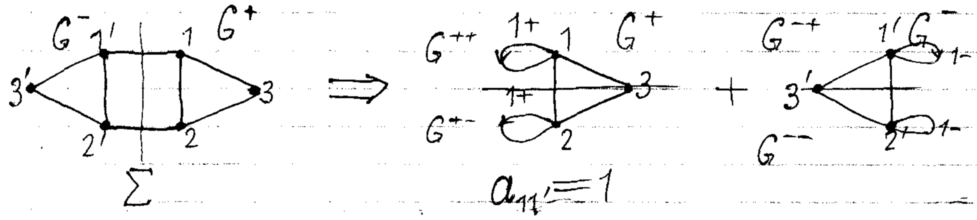
$\lambda_{2,3}=\dfrac{1\pm i\sqrt3}{2}$ $\qquad$ (Отв.: $\lambda^3-\lambda^2-3\lambda$)

$\lambda_{4,5}=\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}.$

(Отв.: $P_G(\lambda)=\lambda(\lambda^2-\lambda-3)(\lambda^2+\lambda-1).$)

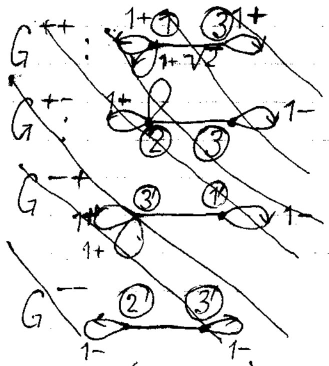
Спектр: $\quad 0;\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}.$

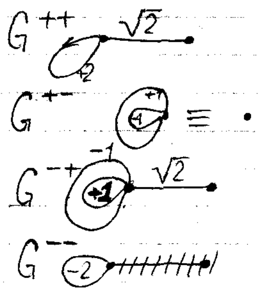
5



$a_{11'}=1$

$a_{11}^+=a_{11}+a_{11'}=0+1=1$
$a_{11}^-=a_{11}-a_{11'}=0-1=-1$





$$A_1=\begin{pmatrix}2&\sqrt2\\ 1&0\end{pmatrix},\quad P_{G^{++}}(\lambda)=\begin{vmatrix}(2-\lambda)&\sqrt2\\ 1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-\sqrt2=0;$$

$$D=4+4\sqrt2=4(1+\sqrt2)$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{1+\sqrt2}}{2}=1\pm\sqrt{1+\sqrt2}$$

$$A_2=(1);\quad P_{G^{+-}}(\lambda)=|(1-\lambda)|=1-\lambda,\ \lambda_3=1;$$

$$A_3=\begin{pmatrix}0&\sqrt2\\ \sqrt2&0\end{pmatrix};\quad P_{G^{-+}}(\lambda)=\lambda^2-2,\ \lambda_{4,5}=\pm\sqrt2$$

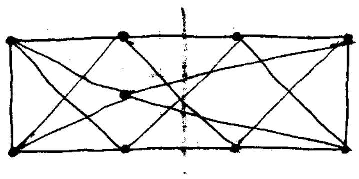
$A_{G^{--}} =$

(Отв.: $P_G(\lambda)=\lambda(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-2)(\lambda^2-2)$)

$\boxed{\text{HOME}}$

28.02.2004.

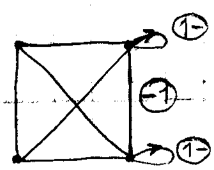
<Теория графов>



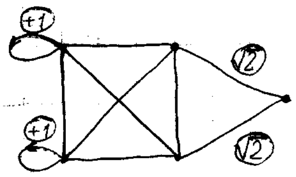
G^- $\qquad\qquad$ G^+

Ребра пересекают Σ под углом.

G^-

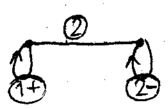


G^+

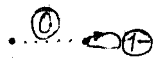


G^{--}

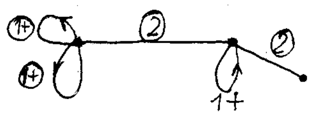
G^{-+}



G^{+-}



G^{++}



$$A_{--}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad A_{-+}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\quad A_{+-}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad A_{++}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$D_{--}(x)=\left|\begin{pmatrix}x-1 & 0\\ 0 & x+1\end{pmatrix}\right|;\ D_{-+}(x)=\begin{vmatrix}x+1 & 2\\ 2 & x-2\end{vmatrix};\ D_{+-}=\begin{vmatrix}x & 0\\ 0 & x-1\end{vmatrix};\ D_{++}=\begin{vmatrix}2+x & 2 & 0\\ 2 & 1+x & 2\\ 0 & 2 & x\end{vmatrix}$$

1. $D_{--} = x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \mp 1}$

2. $D_{-+} = x^2 - x - \overset{-2-4}{6} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1\pm 5}{2} = 3;-2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3;2}$

3. $D_{+-} = x^2 - x \Rightarrow x = \cancel{4}\ 0,1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0;-1}$

4. $D_{++} = x(x^2+3x+2) - 4(2+x) - 4x = x^3+3x^2+2x-8-4x-4x =$

$= x^3+3x^2-6x-8 = 0; \qquad \frac{x^3+3x^2-6x-8}{x-2} = x^2+5x+4 = (x+4)(x+1)$

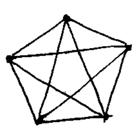
$$\begin{array}{r}
x^3+3x^2-6x-8 \\
\underline{x^3-2x^2} \\
5x^2-6x-8 \\
\underline{5x^2-10x} \\
4x-8 \\
\underline{4x-8} \\
0
\end{array}$$

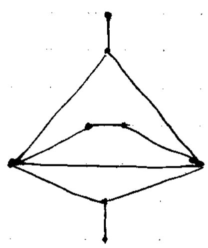
$x = 2;-4;-1 \Rightarrow \boxed{\lambda = -2;4;1}$

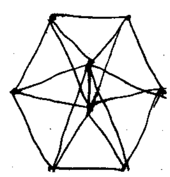
Спектр графа: $-3;-2;-1;-1;0;1;1;2;4;$

$D(\lambda) = \lambda(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-4).$

TRAINING







K_5

в G^+ выделить Σ

</ Теория графов>

Дифференциальные уравнения

Метод комплексных амплитуд

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x) \qquad (1)$$

Если $f(x)=(P(x)\cos\alpha x+Q(x)\sin\alpha x)e^{\lambda x}$, то решать ДУ (1) можно так:

1. $y^{(n)}+\ldots+a_ny=0$

$$\Downarrow$$

$y_0(x)$ (ОРОУ)

2. $y^{(n)}+a_ny=f(x)\Rightarrow y_*(x)$ (ЧРНУ)

Пусть $y_*(x)=(\tilde{P}(x)\cos\beta x+\tilde{Q}(x)\sin\beta x)e^{\lambda x}$,

$\tilde{P},\tilde{Q}$ — неизвестные полиномы степени $\{P,Q\}$-max; при условии, что нет резонанса, т.е. если $(\lambda\pm i\beta)$ — не корень ХУ. Если $(\lambda\pm i\beta)$ — корень ХУ кр. μ, то:

$$y_*=(\tilde{P}\cos\beta x+\tilde{Q}\sin\beta x)e^{\lambda x}\cdot x^{\mu}$$

Метод применим, если в $f(x)$ входит либо sin, либо cos.

$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\ldots+a_nz=P(x)\cdot e^{(\sigma+ip)x}$, далее МНК. $\Rightarrow z_*=z_*(x)$ (ЧРНУ);

z : $y^*(x)=\{Re \text{ or } Im\}\,z_*$.

$\boxed{1}$ $y''+2y'+5y=2\cos x$;

$\lambda^2+2\lambda+5=0$

$D=4-20=-16$;

$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$;

$y_{1,2}=e^{x(\pm2i-1)}=\cancel{e^{x}(\cos}$

$\underline{y_0=C_1e^{-x}\cos2x+C_2e^{-x}\sin2x}$

$z''+2z'+5z = 2e^{ix} = P(x)\,e^{(\sigma+ip)x}$

$\sigma+ip$ — не корень ХУ;

$(p=1, \sigma=0)$

$z_* = Ae^{ix} \longrightarrow A(-1\cancel{e^{ix}}+2i+5)e^{ix} = 2e^{ix} \longrightarrow A = \frac{2}{4+2i} = \frac{1}{2+i} =$

$= \frac{2-i}{5}$; $\quad z_* = \frac{2}{5}e^{ix} - \frac{i}{5}e^{ix}$;

$z_* = \frac{2}{5}(\cos x + i\sin x) - \frac{1}{5}(i\cos x - \sin x)$;

$\mathrm{Re}\, z_* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$

$y_* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$

$A\cos x + B\sin x \Rightarrow$ по принципу суперпозиции.

$\boxed{2}$ $y''-9y = e^{3x}\cos x$

1. $\lambda^2 - 9 = 0$,

$\lambda = \pm 3$

$y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$

2. $z''-9z = e^{3x}\cos x$

$\sigma = 3,\ p = 1$

$z_* = Ae^{(\sigma+ip)x} = Ae^{(3+i)x}$;

$z_*'' = A(3+i)^2e\ldots = A(9-1+6i)e\ldots = (8+6i)Ae\ldots$

$\cancel{4(2}\ (2(4+3i)-9)A\cancel{e\ldots} = \cancel{e\ldots}$

$A = \frac{1}{8+6i-9} = \frac{1}{6i-1} = \frac{-6i+1}{37}$;

$z_* = -\frac{1+6i}{37}e^{(3+i)x}$

$\mathrm{Re}\, z_* = \cancel{-}\mathrm{Re}\frac{1}{\quad} e^{3x}(\cos x + i\sin x) =$

$= \cancel{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{37} + \frac{6i}{37}\right)(\cos x + i\sin x)e^{3x} = \left(\frac{1}{37}\cos x - \frac{6}{37}\sin x\right)e^{3x}$

$y_* = -\frac{1}{37}(\cos x - 6\sin x)e^{3x}$

TRAINING

1. $y^{IV} - y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$
2. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$
3. $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x$

$\boxed{3}$ $y'' + y = x\sin x$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

$\underline{y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$

$z'' + z = x\sin x;$

$z_* = x \cdot A \cdot e^{ix}$

$z_*' = A(e^{ix} + ixe^{ix})$

$z_*'' = A(ie^{ix} + ie^{ix} - xe^{ix}) = A(2ie^{ix} - xe^{ix}) = xe^{ix}$

$$A = \frac{x}{2i - x} = \frac{(-x-2i)x}{x^2+4}$$

$$z_* = \frac{-x^2 - 2xi}{x^2+4} \cdot xe^{ix} =$$

$$= \frac{-x^3 - 2x^2 i}{x^2+4}(\cos x + i\sin x)$$

$$\operatorname{Im} z_* = -\frac{2x^2}{x^2+4}\cos x - \frac{x^3}{x^2+4}\sin x$$

$z_* = (Ax + B)xe^{ix}$

$z_* = e^{ix}(Ax^2 + Bx)$

$z_*'' = (e^{ix}(2Ax + B) + ie^{ix}(Ax^2 + Bx))' =$

$= 2Ae^{ix} + ie^{ix}(2Ax + B) + ie^{ix}(2Ax + B) - e^{ix}(Ax^2 + Bx) =$

$= e^{ix}(2A + \underline{2iAx} + iB + \underline{2iAx} + iB - Ax^2 \underline{- Bx}) =$

$= e^{ix}(Ax^2 + (4iA - B)x + (2A + iB));$

$\cancel{e^{ix}}(Ax^2 + (4iA - B)x + (2A + iB) + Ax^2 + Bx) = x\cancel{e^{ix}}$

$2Ax^2 + 4iAx + 2A + iB = x$

$\underline{A = 0}$; $\underline{iB = 0}$.

05.03.2004.
§3

$$L_n[y]=\sum_{i=0}^{n} y^{(i)}(x)\cdot a_{n-i}(x)=\underline{\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^{(n-i)}(x)}=f(x)$$

Общее решение: $y=y_0(x)+y_*(x)$;

$$y_0(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k,\ \{y_k\}-\text{базис},\ k=\overline{1,n}.$$

Как найти y_*?

Метод вариации постоянных

Предполагается, что решение (ЧРНУ) y_* имеет вид: $y_*=c_1(X)\cdot y_1(X)+\ldots+c_n(X)y_n(X)$, где y_k – базис; как подобрать $c_k(X)$ так, чтобы они удовлетворяли ЛНДУ?

— Дифференцируют y_*:

$$\begin{aligned}
p_n &\to \quad y_*(X)=c_1(X)y_1(X)+\ldots+c_n(X)y_n(X)\\
p_{n-1} &\to \quad y_*'=c_1(X)y_1'(X)+\ldots+c_n(X)y_n'(X)+\underbrace{c_1'(X)y_1(X)+\ldots+c_n'(X)y_n(X)}_{=0\ (1)};\\
p_{n-2} &\to \quad y_*''=c_1(X)y_1''(X)+\ldots+c_n(X)y_n''(X)+\underbrace{c_1'(X)y_1'(X)+\ldots+c_n'(X)y_n'(X)}_{=0\ (2)}\\
+\ \vdots\ & \qquad \ldots\ldots\\
p_0 &\to \quad y_*^{(n)}=c_1(X)y_1^{(n)}(X)+\ldots+c_n(X)y^{(n)}(X)+\left[c_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+c_n'y_1^{(n-1)}\right]
\end{aligned}$$

— Подставляют в исходное ДУ $L_n[y]=f(X)$:

$$\underbrace{p_0}_{=1}\cdot\left(c_1y_1^{(n)}+\ldots+c_ny_n^{(n)}+c_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+c_n'y_n^{(n-1)}\right)+$$

$$+p_1\left(c_1y_1^{(n-1)}+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}\right)+\ldots$$

$\Updownarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\cdot y_k^{(n-i)}(x)\Big) + \underbrace{c_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)}}_{\text{в общем виде}, \ * p_0} = f(x) \quad (*)$$

— Составляют систему линейных уравнений на c_k':

$\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, y_k^{(n-i)}(x) = L_n[y_k] = 0$, ибо y_k — базис-решение ОЛДУ;

Используя требования (1) … (n−1) и (*), получаем систему:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \ldots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + \ldots + c_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \quad \left(\text{в общем виде, } \frac{1}{p_0} f(x)\right) \end{cases}$$

Определитель матрицы системы — вронскиан: $W \neq 0$; поэтому существует и единственно решение системы относительно c_k'.

$$\hat{A}\,\vec{c}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

— Интегрируют полученные выражения и находят c_k. Частное решение: $y_* = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$.

Метод МНК

Если $f(x)$ имеет некий специальный вид: $[p_i(x) \equiv Const$

/квазимногочлен/: $f(x) = \{P_{m_1}(x)\sin\beta x + Q_{m_2}(x)\cos\beta x\} e^{\alpha x}$, то можно найти y_* (ЧРНУ) алгебраическим действием. Ищут частное решение в виде:

$$y_*(x) = x^s\{P_m(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\}e^{\alpha x}, \quad (**)$$

где $m = \max\{m_1, m_2\}$;

$P_m(x), Q_m(x)$ — некие многочлены с неопределенными коэффициентами;

s — обобщенная кратность:

корни ХУ $\neq \mu = \alpha + i\beta$ $\Downarrow$ $s = 0$

$\boxed{\{e^{\lambda x}\} \text{ — базис}}$

корень ХУ $\lambda_i = \mu = \alpha + i\beta$ $\Downarrow$ $s =$ кратность λ_i.

— Подставляют решение $(**)$ в исходное ДУ

— Приводят подобные члены и получают систему $\Rightarrow P_m, Q_m$.

Итак: $y_* = x^s \cdot \{\underline{P_m(x)}\sin\beta x + \underline{Q_m(x)}\cos\beta x\}e^{\alpha x}$.

Примеры

1 $y'' + y = 4\sin x$

1. $\lambda^2 + 1 = 0$ — ХУ $\quad (\Leftarrow y'' + y = 0)$

$\lambda = \pm i$

Найдем вещественный базис:

$y = e^{\lambda x} = e^{\pm i x} = \cos x \pm i\sin x$

базис: $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ $\Rightarrow$ общее решение ЛОДУ:

$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$.

2. Далее воспользуемся методом МНК:

$f(x) = [4\sin x + 0\cdot\cos x]e^{0x}$; $m_1 = 0$, $m_2 = 0$; $\beta = 1$; $\alpha = 0$;

$\mu = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ − корень ХУ; кр. 1; $(s=1)$

$$y_* = x^1 \cdot \{a\sin x + b\cos x\} e^{0x} = ax\sin x + bx\cos x;$$

$$y_*' = a\sin x + ax\cos x + b\cos x - bx\sin x;$$

$$y_*'' = a\cos x + a\cos x - ax\sin x - b\sin x - b\sin x - bx\cos x =$$

$$= 2a\cos x - 2b\sin x - ax\sin x - bx\cos x;$$

$$2a\cos x - 2b\sin x - ax\sin x - bx\cos x + ax\sin x + bx\cos x = 4\sin x$$

$$2a\cos x - 2b\sin x = 4\sin x$$

$$\begin{cases} -2b = 4 \\ 2a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$y_* = -2x\cos x$$

$$y_*' = -2\cos x + 2x\sin x$$

$$y_*'' = 2\sin x + 2\sin x + 2x\cos x$$

$$4\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x = 4\sin x \equiv 4\sin x.$$

Общее решение ЛНДУ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x \overset{+2x\cos x}{\cancel{+4\sin x}} =$

$= \bar{C}_1\cos x + \bar{C}_2\sin x + 2x\cos x.$

Ср.: $(-2b-4)\sin x + 2a\cos x \equiv 0$. Т.к. sin, cos линейно независимы, то $\ldots \equiv 0 \Leftrightarrow -2b-4 \equiv 0,\ 2a \equiv 0$

2.′ МВП

$$\ominus\ \cancel{4} \begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 & |\cos x \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = 4\sin x & |\sin x \end{cases}$$

$$C_1' = -4\sin^2 x\ \cancel{\cos x};$$

$$C_1 = -2\int \sin 2x\,dx = \cos 2x + \bar{C}_1$$

$$C_1 = -2 \cdot \int (1 - \cos 2x)\,dx = -2x + \sin 2x + \bar{C}_1$$

$$C_2 = \cos 2x + \bar{C}_2$$

$$y_* = (-2x + \sin 2x + c_1)\cos x + (\cos 2x + c_2)\sin x =$$

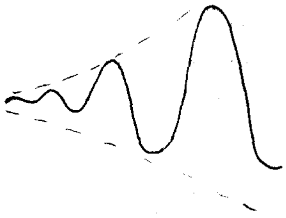
$$= \underbrace{-2x\cos x}_{y_*} + \sin 2x\cos x + \underbrace{c_1\cos x + \cos 2x\sin x + c_2\sin x}_{y_0} =$$

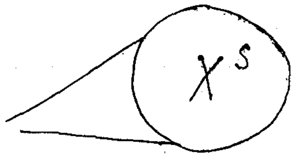
$$= (c_1\cos x + c_2\sin x) - 2x\cos x + \left(2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x\right) =$$

$$= \ldots + (\cos^2 x\sin x - \sin^3 x + 2\sin x\cdot\cos^2 x)\ldots$$

(Отв. : $y = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x$).

<u>Замечание</u>. В данном случае имеем случай резонанса. Видим, что $f(x) = 4\sin x$ — ограничена; а решение, умножаясь на x, неограничено. Если придать x значение времени, то получим „расшатывание":





$$\vec{x}(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\};$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \Leftrightarrow f(t,x) = \dot{x}$$ — нормальная система ДУ

$f(x) = \dot{x}$ — автономное уравнение.

Рассматривают n-мерное пространство $\{x_1 \ldots x_n\}$, где t — параметр. $\{x_1 \ldots x_n\}$ — параметрически заданная кривая (t — параметр).

<u>Фазовое пространство</u> — n-мерное пр-во значений $\{x_1 \ldots x_n\}$, где t играет роль параметра.

Очевидно, что при $\dot{x}(t_1) = 0$: t_1 — точка покоя (как бы $v = 0$). Т. е. в фазовом пр-ве это точка $\vec{X}_1$, которая не движется;

$\dot{X} = f(x) = 0$, решения $\vec{x}_k$ этого уравнения есть точки покоя.

Как ведут себя решения в окрестностях точек покоя? Т. о. решают задачи устойчивости решений.

<1 Семинар>

Упрощение определителей

Определитель блочной матрицы

⚠ Не уверен — не применяй

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

A, B, C, D — матрицы

Удобнее строить A^{-1}, если A — диагональная; нужно для этого правильно пронумеровать вершины графа.

Док-во:

$$\left(\begin{array}{c|c} X & O \\ \hline Y & E \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E & U \\ O & V \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} XA = E \Rightarrow \underline{X = A^{-1}} \\ XB = U \Rightarrow U = A^{-1}B \\ YA + C = 0 \Rightarrow Y = -CA^{-1} \\ YB + D = V \Rightarrow \underline{V = -CA^{-1}B + D} \end{cases}$$

O — нулевая

E — единичная

Произведение матриц и блоков матриц коммутативно.

Далее, используя свойство:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline O & M \end{array}\right) = \det K \det M = \det\begin{pmatrix} K & 0 \\ L & M \end{pmatrix},$$

получим:

$$\det\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det() \cdot \det() = \det\begin{pmatrix} E & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

$$\det X \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D - CA^{-1}B)$$

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) .$$

<u>Следствия.</u>

1. Пусть A, B, C, D — квадратные блоки одинаковой размерности. Тогда:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(\underline{AD} - ACA^{-1}B) = \det(\underline{DA} - CA^{-1}BA)$$

2. Если $A = \lambda E$, тогда: (или если $AC = CA$)

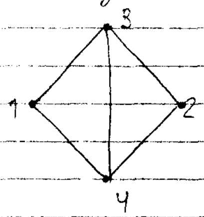
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB) \text{ ☆}$$

☆ Коммутируют ли C & A? Условие: A — диагональная $\Rightarrow$ матрицы коммутируют.

⚠ Лучше пользоваться этим правилом, если A — диагональная.

Диагонализация матриц графов нумерацией:

— вершины со смежными номерами не должны, по возможности, быть соединены:



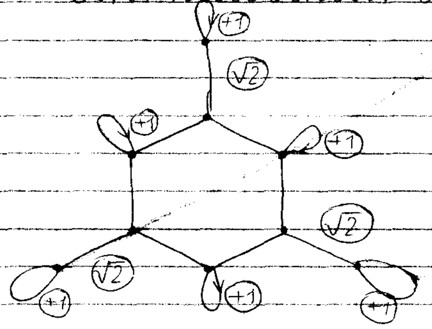
$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix};\quad D=\left|\begin{array}{cc|cc}x&0&1&1\\0&x&1&1\\\hline 1&1&x&1\\1&1&1&x\end{array}\right|=$$

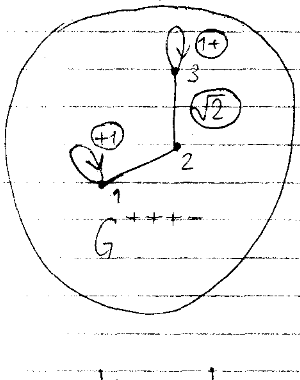
$$=\left|\begin{pmatrix}x^2&x\\x&x^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}x^2-2&x-2\\x-2&x^2-2\end{vmatrix}=(x^2-2)^2-(x-2)^2=$$

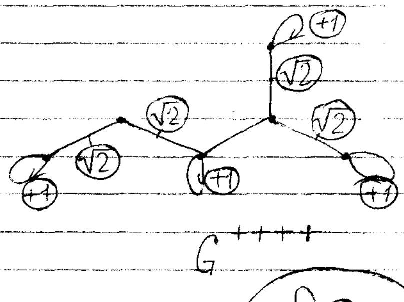
$$=(x^2-2+x-2)(x^2-2-x+2)=(x^2+x-4)(x^2-x)=x(x-1)(x^2-x-4).$$

C_{60} | Хюккелевский спектр фуллерена.

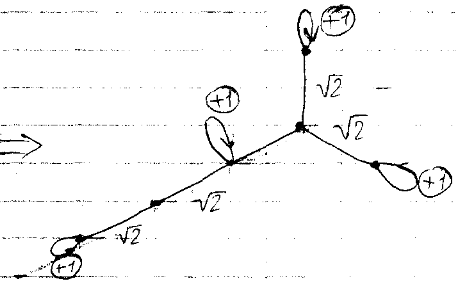
G^{+++}

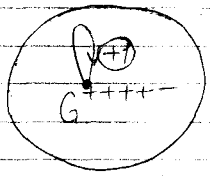


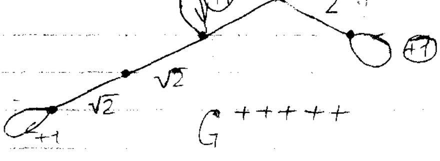




$\Longleftrightarrow$







$$D=\begin{vmatrix}1+x&1&0\\1&x&\sqrt2\\0&\sqrt2&1+x\end{vmatrix}=$$

$$\lambda=1$$

$$=x^3+2x^2+\cancel{x}-2-2x-1-\cancel{x}=$$

$$=x^3+2x^2-2x-3=x^3-x^2+3x^2-3x+$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-2x-3 & x+1 \\ \underline{x^3+x^2} & \overline{x^2+3x} \\ \quad 3x^2-2x-3 & \\ \quad \underline{3x^2-3x} & \\ \qquad\quad x-3 & \end{array}$$

$$x^3+2x^2-2x-3 = \underbrace{x^3+x^2}+\underbrace{x^2+x}-\underbrace{3x-3} =$$

$$= (x+1)(x^2+x-3)$$

$$A_{++++++} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} x+1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 & 2 \\ \hline \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & x \end{array}\right| = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \cdot \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \frac{1}{(x+1)^3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \right| =$$

$$= (x+1)^3 \cdot \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \frac{1}{(x+1)^3} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (x+1)^3 \cdot \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \frac{1}{(x+1)^3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (x+1)^3 \cdot \left| \frac{1}{(x+1)} \cdot \begin{pmatrix} x(x+1)-4 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & x(x+1)-5 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (x+1)^3 \cdot \left| \frac{1}{(x+1)} \begin{pmatrix} xy-4 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & xy-5 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (x+1)^3 \cdot \left| \frac{1}{(x+1)} \cdot \begin{pmatrix} t-4 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & t-5 \end{pmatrix} \right| = (x+1) \cdot \{ t^2 - 9t + 20 - 2 \} =$$

$$= (x+1)\{ \underbrace{t^2-9t+18}_{t=3;6} \} = (x+1)(x^2(x+1)^2 - 9x(x+1) + 18)$$

$$\left[\begin{array}{l} x(x+1)=3 \\ x(x+1)=6 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+x-3=0 \\ x^2+x-6=0 \end{array}\right. \qquad (x+3)(x-2)=0$$

G^{+++++} : $(x+3)(x-2)(x^2+x-3)\underline{(x+1)}$

G^{++++-} : $(x+1)$

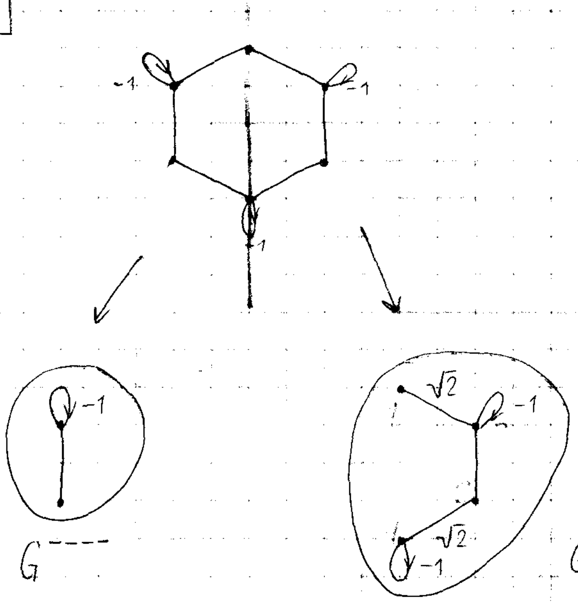
G^{+++-} : $(x+1)(x^2+x-3)$

Видим, что в силу симметрии C_{6v} появляется вырождение

$$P(G^{+++}(\lambda)) = (\lambda-1)^3(\lambda^2-\lambda-3)^2(\lambda+3)(\lambda+2)$$

Общий знак „–" характеристического полинома можно „выбросить"!

$\boxed{G^{---}}$



G^{----} G^{---+}

$$A = \begin{array}{c} \cancel{0\ \sqrt{2}} \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & x & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & x-1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{x^2} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{x^2} \right| = x^2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{x^2} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \left| \frac{1}{x^2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \right) \right| = x^2 \cdot \left| \frac{1}{x^2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \cdot x^2 & 2 - x\sqrt{2} \\ -x^2\sqrt{2} & -2x^2 \end{pmatrix} \right| =$$

$= \frac{1}{x^2} \cdot \Big| = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(6x^4 + x^2\sqrt{2}\cdot(2 - x\sqrt{2})\right) = -\frac{1}{x^2}\cdot(6x^4 + 2\sqrt{2}x^2 - 2x^3) =$

$= -6x^2 + 2x - 2\sqrt{2}$ (Отв.: $(x^2-x-1)(x^2-x-4)$).

$$D_{G---} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - x \pm 1$$

(Отв.: $P_{G---}(\lambda) = (\lambda^2+\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda-4)$).

11.03.2004
§4

Фазовые пространства

ДУ 1-го порядка:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Не умаляя общности, можно сказать, что записано ДУ n-го порядка, или система ЛДУ. (см. 1).

Существует довольно широкий круг задач, которые описываются ДУ без времени t в явном виде:

$\dot{x} = f(x)$ —

<u>автономные задачи</u>. („Ср.: $x \equiv \vec{x}$).

Естественно, $x_1 \ldots x_n$ зависят друг от друга. Оказалось, что решения ДУ удобнее рассматривать в $\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$, рассматривая t как параметр. $\mathbb{R}^n$ наз. <u>фазовым пространством</u>. При изменении t

точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет описывать $\mathbb{R}^n$ траекторию. Каждая точка траектории описывает состояние системы в момент времени t. Кроме того, можно узнать скорости $\dot{x} = f$ системы в каждый момент времени.

Пусть:

— имеется система двух уравнений с двумя неизвестными;

— ф-ции $\vec{f} = \{f_1, f_2\}$ — линейны.

Тогда будем рассматривать фазовую плоскость $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\cancel{t}\, x_1, x_2) = a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = a_2 x_1 + b_2 x_2 \quad (\text{линейность}). \end{cases}$$

(Не умаляя общности, ибо $Ax+By+C \overset{\text{замена}}{\Longleftrightarrow} a_1 x + b_1 y$).

Или, обозначая:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \vec{x} \equiv x$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = A$$

получим такую запись системы: $\dot{x} = Ax$.

$\dot{x}$ — скорость точки в $\mathbb{R}^2$.

Пусть x — точки покоя: $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ (записали „условие покоя"). Точки покоя не движутся.

В нашем случае точка покоя — это начало координат: $x = 0$.

Далее, нашу систему можно понимать как линейное ДУ 2-го порядка, которое нами уже исследована.

Т.о., выводы, справедливые для ЛДУ, справедливы и для автономных систем.

Аналог корней ХУ ЛДУ — ~~хара~~ собственные значения матрицы A. Каждому собственному значению ставится в соответствие собственный вектор.

Характер поведения траектории на фазовой плоскости зависит от собственных значений A. Итак, исследуем этот вопрос. $\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix}=0$ — ХУ.

1. Собственные значения вещественны и различны, и не равны нулю: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\in \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} \neq 0$. ($\Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 \neq 0$).

а) $\lambda_1\lambda_2>0$ (одного знака):

$A h_1 = \lambda_1 h_1$

$A h_2 = \lambda_2 h_2$ (с точностью до постоянного множителя).

В общем виде решение запишется в виде: $x = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$. Притом очевидно, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то h_1 и h_2 линейно независимы.

Выполним проверку:

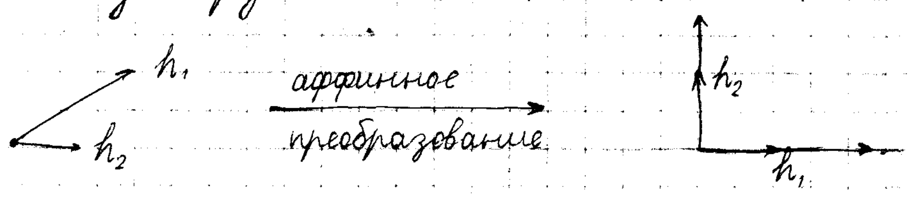
$\dot{x} = c_1\lambda_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$;

$Ax = c_1\lambda_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$, ибо матрица — линейный оператор (его применяют к каждому слагаемому.) Так получили общее решение, и

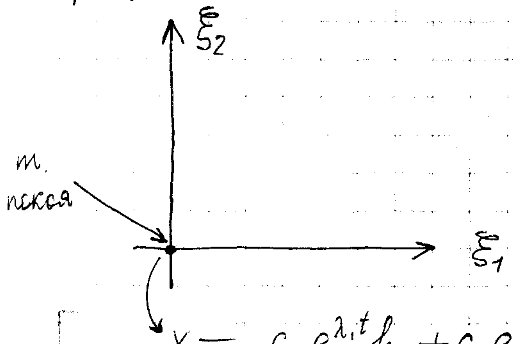
[можно по задаче однозначно найти c_1 и c_2.

Геометрическая интерпретация.

Векторы h_1, h_2 не коллинеарны. Можно ввести систему координат на плоскости:

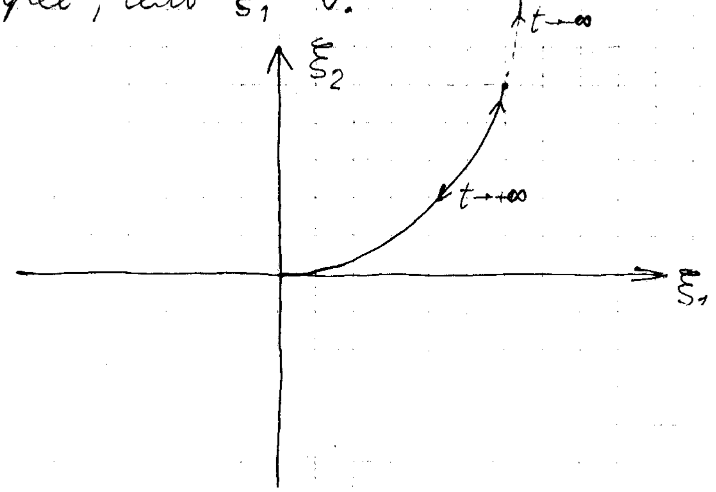


Тогда, очевидно: $x = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2 = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$, где „компоненты" $\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Тогда фазовая плоскость изобразится так:

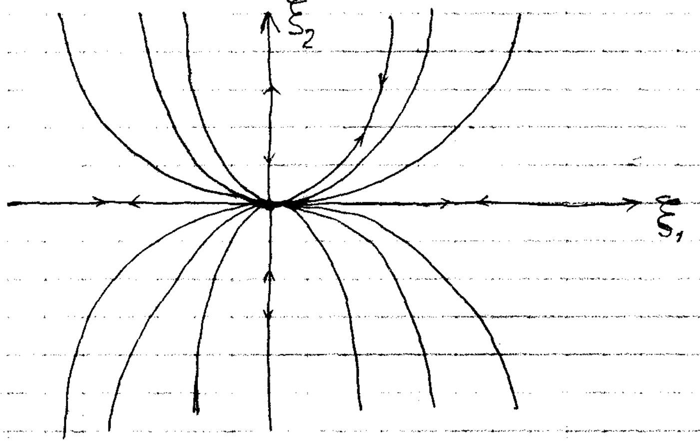


[$x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$ ($c_1 = c_2 = 0$ в точке покоя).

Предположим, что $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Если λ_1, λ_2 отрицательны, то при росте t $\xi_1 \to 0$, $\xi_2 \to 0$, и притом $\xi_2 \to 0$ быстрее, чем $\xi_1 \to 0$.



Поскольку справедлива теорема существования и единственности, через одну точку проходит одна траектория. Итак, получим семейство траекторий:



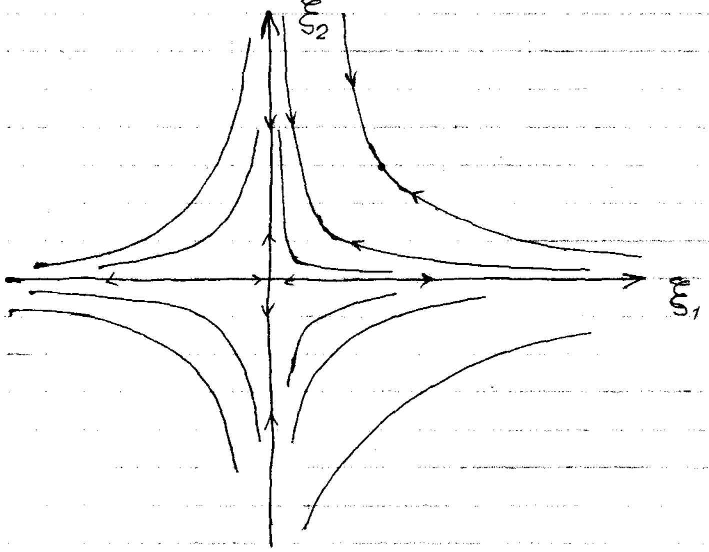
„Узел"

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \Rightarrow$ узел устойчив

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0 \Rightarrow$ узел неустойчив

Итак, если собственные значения вещественны, различны и одного знака, то имеем „узел".

б) Пусть теперь λ_1, λ_2 вещественны, различны, но разных знаков.



„Седло"

Седло всегда неустойчиво.

2. Пусть λ_1, λ_2 комплексные ($\Rightarrow$ всегда различные).

а) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\mu$, причем $\mu \neq 0$

Запишем общее решение: $x =$

$h = \frac{1}{2}(h_1 - ih_2)$ (это всегда можно сделать).

[тогда $x = \underbrace{C}_{\in \mathbb{C}} h e^{\lambda t} + \bar{C}\bar{h} e^{\bar{\lambda} t}$, „$\bar{\ }$" $\equiv$ „$*$", x —

действительная вектор-функция.

Можно выполнить проверку: $\dot{x} = Ax$.

Обозначим:

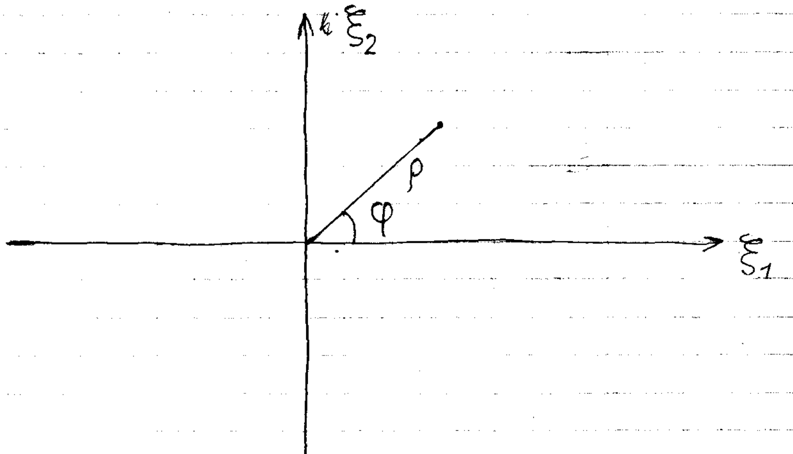
$\zeta = Ce^{\lambda t}$ $(C = c_1 + ic_2, \ldots) \in \mathbb{C}$; $\equiv \xi_1 + i\xi_2$

Тогда $x(t) = (\xi_1 + i\xi_2)\cdot\frac{1}{2}(\underbrace{h_1}_{\in\mathbb{R}^2} - i\underbrace{h_2}_{\in\mathbb{R}^2}) + (\underbrace{\xi_1}_{\in\mathbb{R}^2} - i\underbrace{\xi_2}_{\in\mathbb{R}^2})\cdot\frac{1}{2}(h_1 + ih_2) =$

$= \frac{1}{2}\{\xi_1 h_1 + \xi_2 h_2 + i\xi_2 h_1 - i\xi_1 h_2 + \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2 - i\xi_2 h_1 + i\xi_1 h_2\} =$

$= \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2.$

Итак, $x(t) = Che^{\lambda t} + \bar{C}\bar{h}e^{\bar{\lambda}t}$, где $\zeta = Ce^{\lambda t} = \xi_1 + i\xi_2$.



Запишем ζ в тригонометрической форме:

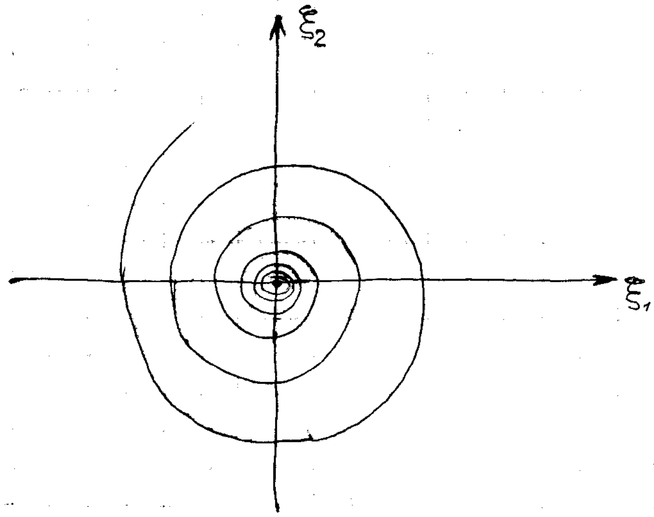
$\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \equiv \rho e^{i\varphi}$; $C = Re^{i\psi}$; $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}e^{i\mu t}$. Тогда:

$$\xi_1 + i\xi_2 = \rho e^{i\varphi} = R e^{\alpha t} \cdot e^{i(\mu t + \psi)};$$

$$\begin{cases} \rho = R e^{\alpha t} \\ \varphi = \mu t + \psi \end{cases}$$

Имеется 2 возможности:

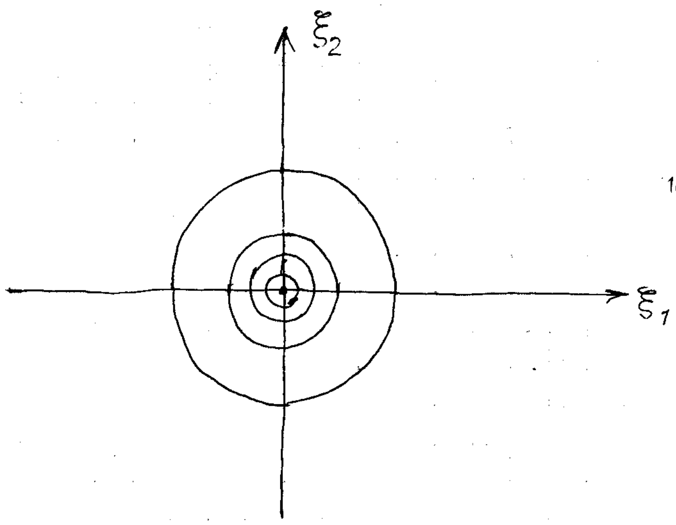
1. $\alpha \neq 0$



„Фокус"

Устойчивый ($\alpha<0$) или неустойчивый ($\alpha>0$) фокус.

2. $\alpha = 0$



„Центр"

3. Собственное значение одно, двукратно вырождено, не равно нулю:

$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2\in R,\ \lambda\neq 0$$

Очевидно, что: $Ah=\lambda h$.

Как построить второй вектор? Возьмем $\forall h_2 \nparallel h$ (они, следовательно, образуют репер).

$$Ah_2=\alpha h+\beta h_2 \quad \text{(разложили по реперу YO!)}$$

$$A^*=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$$

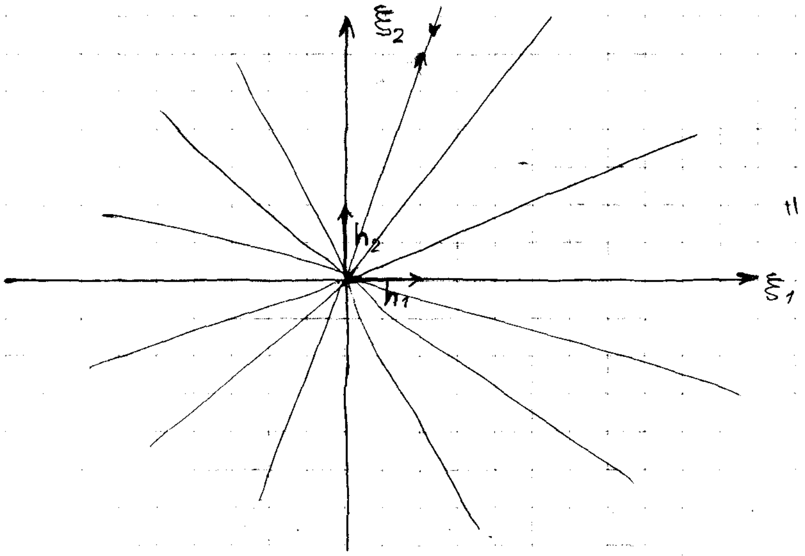
а) Возможно: $\exists\, h_2:\ Ah_2=\lambda h_2\quad(\alpha=0)$

б) возможно: $\exists\, h_2:\ Ah_2=\alpha h+\lambda h_2$

$$\Big\Downarrow\ A\underbrace{\alpha h_2}=\lambda\underbrace{\alpha h_2}$$

$$Ah_1=\lambda h_2+h_1$$

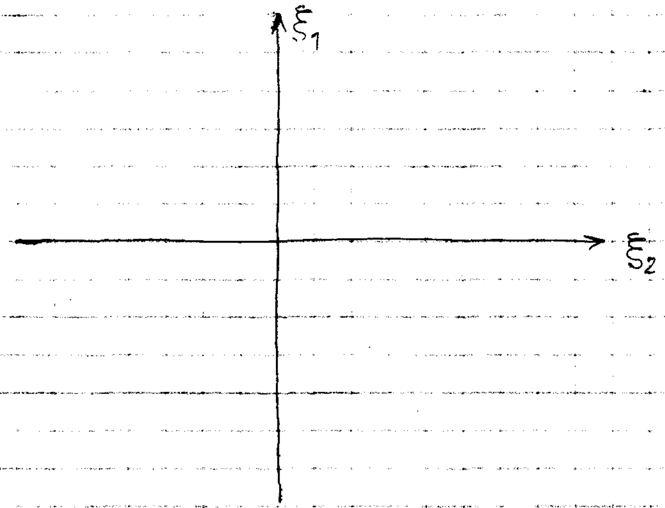
а) $x(t)=c_1h_1e^{\lambda t}+c_2h_2e^{\lambda t}\equiv(c_1h_1+c_2h_2)\,e^{\lambda t}$



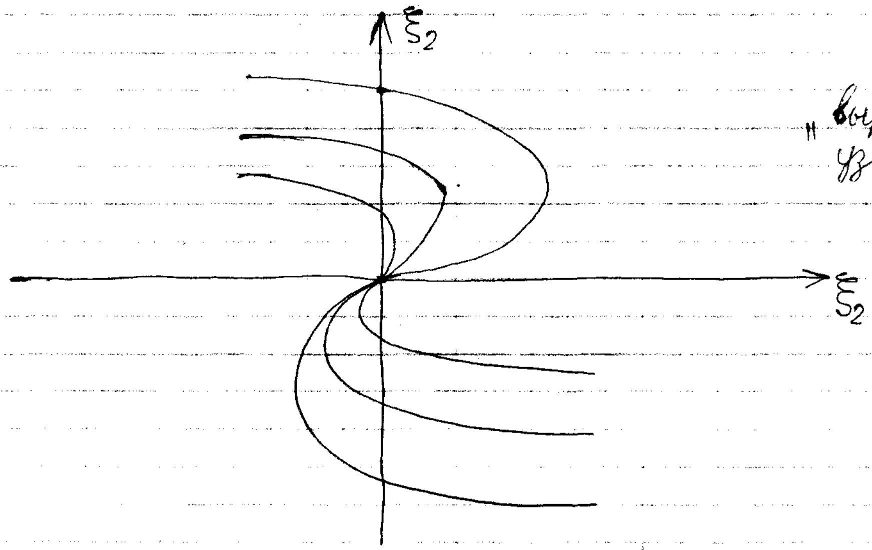
"дикритический узел"

Возможен тогда и только тогда: $A=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ вырожденный узел.



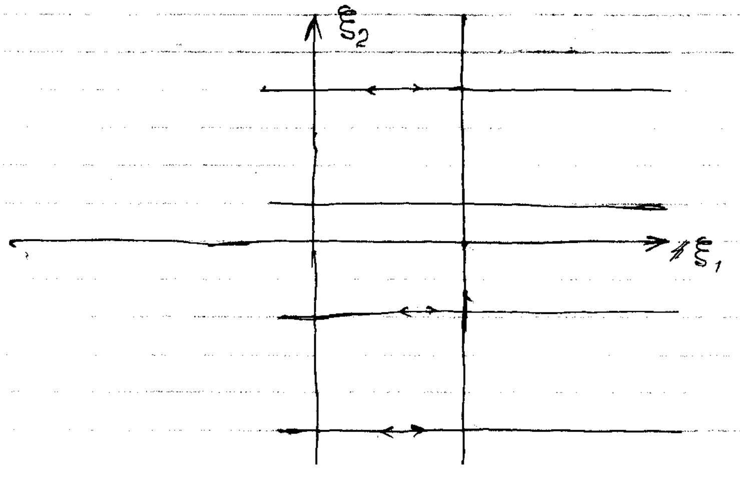
$$x(t)=c_1h_1e^{\lambda t}+(c_1th_1+c_2h_2)e^{\lambda t}=$$
$$=c_1h_1e^{\lambda t}+c_2(h_1t+h_2)e^{\lambda t}=\xi_1h_1+\xi_2h_2,\ \xi_1=(c_1+c_2t)e^{\lambda t},\ \xi_2=c_2e^{\lambda t}$$



"вырожденный узел"

4. $\lambda_1=0,\ \lambda_2\neq 0$

$$x(t)=c_1h_1+c_2h_2e^{\lambda_2 t}$$



5. $\lambda_1=\lambda_2=0$ — любая точка есть точка покоя. $a_i=0$

18.03.2004
§5

Устойчивость решений систем ДУ

Рассмотрим автономную систему:

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=f(\cancel{t},x) \qquad (1)$$

(t входит неявным образом).

Пусть заданы начальные условия:

$x(t_0)=x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x(0)=x_\tau}$ (где $\tau=t-t_0$, $x'_t=x'_\tau$)

$(=\xi)$.

Т. о., имеем задачу. Если f непрерывны в Ω и имеют ограниченные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$? в Ω, то решение:

$\varphi(t,\xi)$

существует и единственно:

$\varphi(0,\xi)=\xi$.

Неподвижной точкой системы наз. такая точка a („вектор"), в которой $f(a)=0$ ("0" – вектор).

Устойчива ли точка покоя?

* Можно ввести ф-цию $y(t) = x(t) - a$, и тогда условие покоя $f(y+a) \equiv f(y) = 0$. Т.е. можно ~~к~~ рассматривать $a = 0$ (ср.: параллельный перенос ~~в~~ центра координат в т. a).

Опр. Точка покоя a наз. устойчивой, если:

1. ~~$\exists \rho: \|x-a\| < \rho$~~ — существует решение ~~системы (1)~~

Норма:

$\|x\|$

1. $\forall x \in X: \|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x^1 + x^2\| \leq \|x^1\| + \|x^2\|$

Причем:

? $\left[\begin{array}{l} \rho(x;y) \Rightarrow \|z\| = \rho(z,0), \\ \|z\| \Rightarrow \rho(x,y) = \|x-y\| \end{array}\right.$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести норму бесконечным числом способов, причем можно доказать, что: в α все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны:

$\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta: \ \exists c_1, c_2: \forall x: \ \|x\|_\alpha \leq c_1 \|x_\beta\| \leq c_2 \|x\|_\alpha$,

где c_1, c_2 не зависят от x (Const).

В пространстве ф-ций можно определить три нормы:

— норма в пространстве C:

$f(x)$ непр. в $[a;b]$; $\|f\| = \max\limits_{[a;b]} |f(x)|$

— норма в L_1:

f абсолютно интегрируемы $\Rightarrow \|f\| = \int\limits_a^b |f(x)|dx$

— норма в L_2:

$f: \quad \exists \int\limits_a^b f^2\,dx$ (энергия ограничена):

$$\|f\|^2 = \int\limits_a^b (f(x))^2 dx$$

Аналог равномерной нормы для векторов:

$\|f(x)\|_C \equiv \max\limits_{[a;b]} |f(x)|$: $\quad \|X\|_1 = \max\limits_{\forall i} |x_i|$;

далее:

$\|f(x)\|_{L_1} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$: $\quad \|X\|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

$\|f(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$; евклидова норма:

$$\|X\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

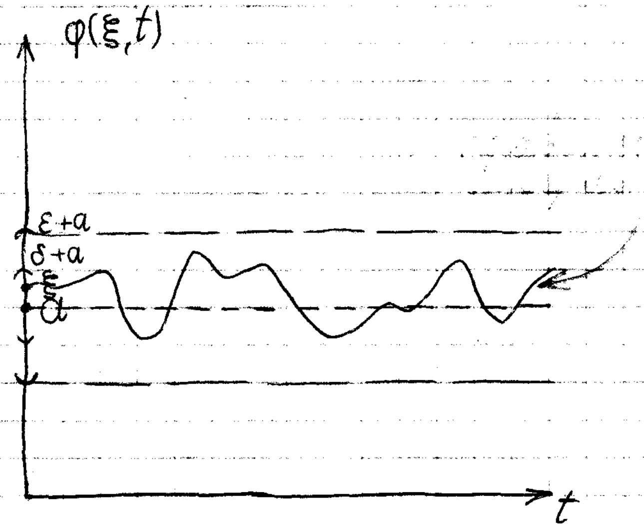
Итак, в качестве ρ можно взять любую норму для векторов.

~~2.~~

1. $\exists \rho: \forall \xi: \|\xi - a\| < \rho: \ \exists \varphi(t, \xi)$
2. $\cancel{\exists \delta \le \rho}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \delta \le \rho:$

$$\forall \xi: \|\xi - a\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t,\xi) - a\| < \varepsilon,$$

для $\forall t \ge t_0$.



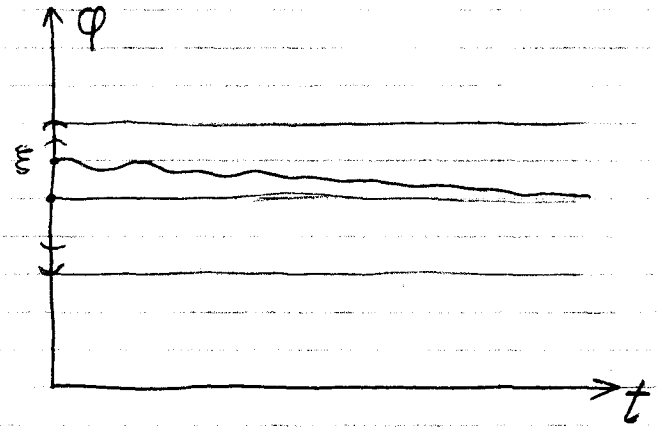
Т. е., никакое решение не выходит за пределы ε-окрестности точки покоя a.

Опр. точка a наз. ~~ограни~~ асимптотически устойчивым, если:

1) $\exists \rho : \forall \xi \ \|\xi - a\| < \rho \ \exists \varphi(t,\xi)$
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \leq \rho : \ \forall \xi \ \|\xi - a\| < \delta$

$$\|\varphi(t,\xi) - a\| < \varepsilon \quad , \forall t \geq t_0$$

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\varphi(t,\xi) - a\| = 0$.



Как проверить выполнение вышеперечисленных условий?

Ляпунову удалось доказать два факта.