ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

12.02.04
§1

Введение

$y'=f(x,y)$, $y(x)$: $\begin{cases} \exists\, y'(x) \\ \frac{dy}{dx} \equiv f(x,y) \end{cases}$ – решение ДУ

$y^{(n)}(x)=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ – ДУ n-го порядка

$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ – неявное ДУ n-го порядка

Решение ДУ неоднозначно. Для однозначности достаточно задать начальные условия:

$y(x_0)=y_0$ (точка $M_0(x_0;y_0)$),

тогда получим задачу:

$\begin{cases} y'=f(x;y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ (1-го порядка), или $\begin{cases} y^{(n)}(x)=f(x,y\dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \\ \dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$ (n-го порядка).

Нормальная система ДУ:

$$\begin{cases} u_1'(x)=f_1(x,u_1,\dots,u_n) \\ u_2'(x)=f_2(x,u_1,\dots,u_n) \\ \dots\dots\dots \\ u_n'(x)=f_n(x,u_1,\dots,u_n) \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{d\vec{u}}{dx}=\vec{u}'(x)=\vec{f}(x,\vec{u})$$

$\vec{u}(x)=\{u_1\dots u_n\}$

Утверждение. Любое ДУ n-го порядка можно представить как нормальную систему:

$$\begin{cases} u_1(x) = y(x) \\ u_2(x) = y'(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1}(x) = y^{(n-2)}(x) \\ u_n(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases} \quad (\text{замена}) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \dots\dots \\ u_{n-2}' = u_{n-1} \\ u_{n-1}' = u_n \\ u_n' = f(x, u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

Вывод. Для исследования ДУ^n достаточно изучать нормальную систему.

Имеет ли задача

$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{f}(x, \vec{u}) \\ \vec{u}(x_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

решение, и единственно ли это решение? Существует ли то, что нужно найти? Выясним условия существования решения нормальной системы.

Сформулируем и докажем общую теорему.

Предположим, что дана задача:

? $u = \varphi(u)$ $(*)$

Видно, что любую задачу можно записать в виде $(*)$.

$$L(u) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$u = u - L(u)$$
$$\Updownarrow$$
$$u = \underbrace{u - \overset{?}{g(u)} \cdot L(u)}_{\equiv \varphi(u)}, \quad g \neq 0$$

Пусть:

1. $u \in U$, U — полное метрическое пространство.
2. пусть φ — такое преобразование, что переводит U в U:

$\varphi: U \mapsto U$

Метрическое пространство: в нем задана метрика: для $\exists u_1, u_2 \in U$: $\exists \rho(u_1, u_2)$ — число, причем ρ удовлетворяет аксиомам:

1. $\rho(u_1, u_2) \geqslant 0$; $\{\rho(u_1, u_2) = 0\} \Leftrightarrow \{u_1 = u_2\}$.
2. $\rho(u_1, u_2) = \rho(u_2, u_1)$ (симметрия)
3. $\rho(u_1, u_2) \leqslant \rho(u_1, u_3) + \rho(u_2, u_3)$ (нерав-во треугольника)

Расстояние ρ — мера различия элементов в множестве U.

Например, можно ввести метрику так:
$\rho(u_1, u_2) \equiv \|u_2 - u_1\|$ (норма: $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|$),
причем: $\|u\| = \rho(u, 0)$, т.е. в данном случае метрика и норма эквивалентны

Важность метрики в том, что её существование дает возможность сравнивать. Без метрики невозможно построить теорию. Метрика дает возможность сравнить абстрактные элементы различных множеств.

Существует ли неметрическое пространство?

Из существования метрики рождается понятие сходимости последовательности чисел:

$\{u_n\} \to u \Leftrightarrow \underline{\underline{\rho(u_n, u)}} \to 0$, т.е.:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N: \ \rho(u_n, u) < \varepsilon$$

(со всеми вытекающими свойствами).

Существует необходимое и достаточное условие существования предела последовательности (критерий

?$\Rightarrow$ Коши). Существует последовательность (сходящаяся), — для которой критерий Коши не выполнен ~~а последовательность~~. Последовательность чего? – Функций. Существует такая последовательность и такая метрика, что критерий Коши справедлив, а последовательность расходится.

Необходимо ввести понятие <u>полного пространства</u>, т.е. такого, что всякая <u>фундаментальная последовательность</u> в нем (т.е. такая, для которой справедливо условие Коши:

$$\forall \varepsilon>0, \exists N : \underset{\forall p}{\forall n>N}, \ \rho(u_{n+p}, u_n) < \varepsilon)$$

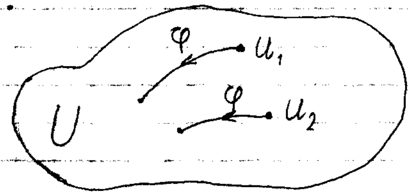
сходится.

Итак, введено понятие <u>полного метрического пространства</u>.

3. φ – <u>сжимающее отображение</u>:

$\exists q<1, \ \forall u_1, u_2 \in U:$

$\rho(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \le q\cdot\rho(u_1, u_2)$



Тогда:

1. $\exists! \ a : a=\varphi(a)$ (уравнение имеет решение, притом единственное;

2. $u_0 \in U$, устроим такой итерационный процесс:

$u_{n+1}=\varphi(u_n)$. Тогда итерационный процесс сходится при <u>любом</u> начальном приближении u_0:

$\forall u_0 \in U: \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \bar{u}$;

3. $\bar{u}=a$;

4. Справедлива оценка: $\rho(u_n, a) \leq \frac{a}{1-q} \cdot q^n$ для погрешности. Погрешность убывает экспоненциально, причем $a = \rho(u_1, u_0)$.

Данная теорема единственна в мире в своем роде; она замечательна тем, что:

1) можно решить любое ДУ, взяв по произволу u_0

2) можно решить и нелинейные ДУ и задачи.

Нелинейные задачи очень сложны.

■ Рассмотрим расстояние $\rho(u_{n+1}, u_n) = \rho(\varphi(u_n), \varphi(u_{n-1})) \leq$
$\leq q \cdot \rho(u_n, u_{n-1}) \leq \ldots \leq q^n \cdot \rho(u_1, u_0)$. (**) Возьмем $n, p \in \mathbb{N}$.

$$\rho(u_{n+p}, u_n) \leq \rho(u_{n+p}, u_{n+p-1}) + \rho(u_{n+p-1}, u_n) \leq \text{(3 аксиома метрики)}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{p-1} \rho(u_{n+k+1}, u_{n+k}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} q^{n+k} \cdot \rho(u_1, u_0) = \underset{\text{кон.}}{a} \cdot q^n \cdot \sum_{k=0}^{p-1} q^k \overset{?}{=} \frac{a}{1-q} \cdot q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

в силу оценки (**)

Получили, что $\{u_n\}$ – фундаментальная $\Rightarrow$ сходящаяся, $\forall u_0$. Доказан пункт 2. Далее,

$$\bar{u} = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim \varphi(u_k) \overset{?}{=} \varphi(\bar{u}) \Rightarrow \exists \alpha = \bar{u}.$$

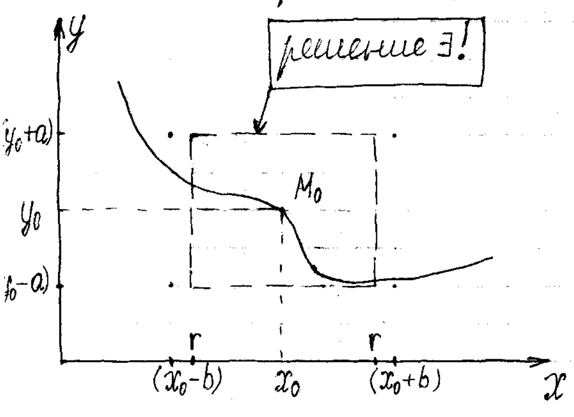
$$\rho(u_n, u_{n+p}) \leq \frac{a}{1-q} \cdot q^n \longrightarrow \rho(u_n, \bar{u}) \left(\leq \frac{a}{1-q} \cdot q^n\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \alpha = \varphi(\alpha) \\ \beta : \beta = \varphi(\beta) \end{array}\right| \Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = \rho(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \leq q \cdot \rho(\alpha, \beta)$$

$$\underbrace{(1-q)}_{>0} \cdot \rho(\alpha, \beta) \leq 0, \Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = 0 \overset{1.}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta,$$

чем доказана единственность решения. ■

Теперь рассмотрим теорему в применении к ДУ.



Будем предполагать, например, что $f(x)$ непрерывна в прямоугольнике и $\exists$ непр. $f'(x)$ (там же). Проинтегрировав в пределах $[x_0; x]$. Используя нач. усл., перепишем задачу:

$$y(x) = \underbrace{y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx}_{\varphi(y)} \equiv \varphi(y);$$

φ здесь есть преобразование:

$$y^*(x) = \varphi(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt.$$

Требование $U \xrightarrow{\varphi} U$ означает, что $\varphi(y)$ принадлежит обозначенной полосе: $|\varphi - y_0| < a$ r?

$$\Downarrow$$

$$|y^*(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t,y)|\,dt \leq \overset{b}{r} \cdot K \leq a \Rightarrow \begin{cases} r \leq b \\ r \leq \frac{a}{K}. \end{cases}$$

$(|f(t,y)| \leq K)$

Тогда $\varphi: U \mapsto U$. Введем метрику:

$$\rho(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|,$$

$$\|g(x)\| \equiv \max_{a \leq x \leq b} |g(x)| \;\Delta?$$

ошибка?

$$\rho(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) = \|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} \{f(t, y_1) - f(t, y_2)\}\,dt \right\| \leq$$

$$\leq \max_{[x_0 - r; x_0 + r]} \left| \int_{x_0}^{x} \{\underbrace{f'_y(t, \tilde{y})}_{\leq L}(y_1 - y_2)\}\,dt \right| \leq, \quad \tilde{y} \in [y_0 - r; y_0 + r], \ \exists \text{ непр. } f'_y.$$

$$\leq L \cdot r \cdot \max_{t \in [x_0 - r; x_0 + r]} |y_1(t) - y_2(t)| = L \cdot r \cdot \|y_1 - y_2\| = L \cdot r \cdot \rho(y_2, y_1)^{***};$$ (сжимаемость)

потребуем: $q = L \cdot r < 1 \Rightarrow r < \frac{1}{L}.$

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f - f_n| = 0$$

$\Updownarrow$ f непр.

$$\lim_{n \to \infty} \max |f - f_n| = \lim \|f - f_n\| = 0$$

Для выполнения (***) можно требовать:

а) $f'_y(x; y)$ — непр?

б) f — непр., f'_y — огранич? — непр?

в) условие Липшица: ~~$|x - x_0| \leq r \Rightarrow |y(x) - y(x_0)| \leq M \cdot |$~~

$\Rightarrow |g(x,y_1)-g(x,y_2)| \leq M\cdot |y_2-y_1|$; f – непр.

Т.о., выполнения одного из условий а–в достаточно для выполнения теоремы. Теорему можно аналогично доказать для рассмотренной системы Д.У.

Линейные Д.У

$f(x)=L_n[y]= a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_n\cdot y$, где $a_0\ldots a_n$, y – функции x.

Предположим, что $a_k(x)$ – непрерывные, и что $a_0(x)\neq 0$.

$\Leftrightarrow L_n[y]=y^{(n)}(x)+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\cdot y(x)$, p_i – непрерывны.

Однородное уравнение:

$f(x)=0$, $a_0 y^{(n)}+\ldots+a_n y=0$, $L_n[y]=0$

< Семинар >

Дифференциальные уравнения
(составление и решение)

$\boxed{1}$ $A+B\to X$;

$t=0$ $\dot{a}<b$

$$\frac{d[A]}{dt}=k[A][B]$$

$$\frac{d[A]}{A}=k[B]dt=\cancel{k\cdot[B]dt}=k\cdot(b-[A])dt$$

$[A]=x(t)$

$[B]=y(t)$

$\cancel{b-x(t)=}$ $y(t)=b-x(t)$

$$\frac{dx}{dt}=kx(b-x)\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int k\,dt\,;$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int \frac{(a-x)-(b-x)}{(a-x)(b-x)}\,dx = \int \frac{dx}{b-x} - \int \frac{dx}{a-x} = \ln|b-x| - \ln|a-x| +$$

$$+ \ln|c| = \ln\frac{c(b-x)}{a-x} = kt\,;$$

$$\boxed{c \cdot \frac{b-x}{a-x} = e^{kt}}$$

$$t=0: \quad a_0, b_0, \quad x=0; \quad c\cdot\frac{b_0}{a_0} = e^k, \quad c = \frac{a_0}{b_0}\cdot e^k$$

$$t=\tau: \quad a=0, \quad b=\underset{}{\overset{=b-a}{b'}}, \quad x=a_0, \quad c\cdot\frac{b'-a_0}{-a_0} = e^{k\tau};$$

$$e^{k\tau} = \frac{\cancel{a_0}}{b_0}\cdot\frac{a_0-b'}{\cancel{a_0}}\cdot e^k = \frac{b_0-a_0}{b_0}\,e^k;$$

$$e^{(k-1)\tau} = \frac{b_0-a_0}{b_0}$$

$$\cancel{c\cdot\frac{b-a}{a-a}}$$

$$t=0: \ a=a_0, \ b=b_0, \ x=0, \ c\cdot\frac{b_0}{a_0} = e^0 = 1, \ c = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\boxed{\frac{a_0}{b_0}\cdot\frac{b_0-x}{a_0-x} = e^{kt}}$$

$$t=\tau: \quad x=a_0, \ a=0, \ b=b_0-a_0 \ ; \quad \cancel{\frac{a_0}{b_0}\cdot\frac{b_0-a_0}{a_0}}$$

$$\frac{b_0-x}{a_0-x} = \frac{b_0}{a_0}\cdot e^{kt}$$

$$b_0 - x = (a_0-x)\cdot\frac{b_0}{a_0}e^{kt} = \left(b_0 - x\cdot\frac{b_0}{a_0}\right)\cdot e^{kt} = b_0\cdot e^{kt} - x\cdot\frac{b_0}{a_0}\cdot e^{kt};$$

$$\cancel{x\cdot(1-}$$

$$x\cdot\left(\frac{b_0}{a_0}\cdot e^{kt} - 1\right) = b_0\left(e^{kt}-1\right)$$

$$x(t) = \frac{b_0(e^{kt}-1)}{\frac{b_0}{a_0}e^{kt}-1}$$

$t=\tau:\quad x=a_0,\ a=0,\ b=b_0-a_0;\quad a_0=\dfrac{b_0(e^{k\tau}-1)}{\frac{b_0}{a_0}e^{k\tau}-1}$

$$\frac{dx}{dt}=k(a_0-x)(b_0-x);$$

$$\int_0^{a_0}\frac{dx}{(a_0-x)(b_0-x)}=\int_0^{\tau}k\,dt$$

$$\int_0^{a_0}\frac{1}{(a_0-x)(b_0-x)}\,dx=\int_0^{a_0}\frac{dx}{b_0-x}-\int_0^{a_0}\frac{dx}{a_0-x}=\Big[-\ln|b_0-x|+\ln|a_0-x|\Big]_0^{a_0}=$$

$$=-\ln(b_0-a_0)+\ln(b_0-0)+\ln(a_0-a_0)\ldots$$

$$\int_0^{x}\frac{dx}{(a_0-x)(b_0-x)}=\int_0^{t}k\,dt\Rightarrow \ln|a_0-x|\Big|_0^x-\ln|b_0-x|\Big|_0^x=kt\Big|_0^t;$$

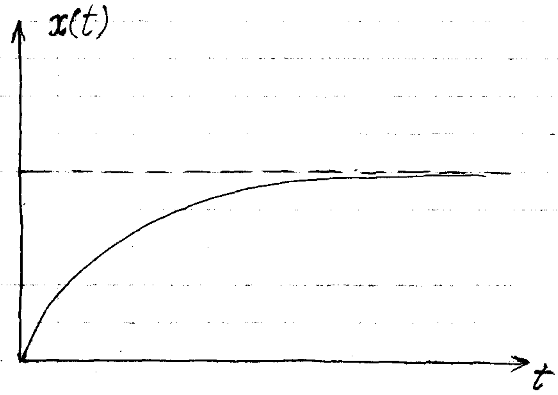
$$\ln|a_0-x|-\ln|a_0-0|-\ln|b_0-x|+\ln|b_0-0|=kt;$$

$$\ln\left|\frac{a_0-x}{b_0-x}\right|+\ln\frac{a_0}{b_0}=kt$$

$$\ln\left|\frac{a_0-x}{b_0-x}\right|=kt+\ln\frac{a_0}{b_0}$$

$t=\underset{\text{„}\infty\text{"}}{\tau}:\quad x=a_0,\ a=0,\ b=b_0-a_0$

$$\cancel{\ln\left|\frac{a_0-a_0}{b_0-a_0}\right|}=k\tau+\ln\frac{a_0}{b_0}$$



(Отв.: $x(t)=\dfrac{a_0b_0(e^{(b-a)kt}-1)}{b\,e^{(b-a)kt}-a}$).

$t\to\infty,\ x(t)\to a.$

ДУ первого порядка

- $y'=f(y,x)$
- ЛДУ
- Бернулли
- инт. множитель

$\boxed{2}$ $\underline{x^2y^2dy=(x^3+y^3)dx} = y^3dx+x^3dx=(x+y)(x^2-xy+y^2)dx$

$\cancel{\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}$

$x\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x};\quad \frac{y}{x}=u,\ y=ux;\ dy=udx+xdu;$

$\cancel{udx}+xdu=(u^2+\cancel{u})dx$

$xdu=u^2dx;$

$\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$

$-\frac{1}{u}=\ln|cx|;$

$-\frac{y}{x}=\ln|cx|$

$y=-x\ln|cx|$

(Отв.: $\frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{x^3}=\ln|cx|$)

$\boxed{3}$ $y'+2xy=xe^{-x^2}$

1) $y'+2xy=0;$

$\frac{dy}{dx}=-2xy;\quad \frac{dy}{y}=-2xdx;\quad \ln|y|=-x^2+c;$

$y(x)=e^{-x^2}+e^c$

2) $y=e^{-x^2}+e^c$

$y'=-e^{-x^2}\cdot 2x+e^c\cdot c';$

$-\cancel{2xe^{-x^2}}=-c'e^c+\cancel{2x\cdot e^{-x^2}}=xe^{-x^2}$

$-e^c\cdot\frac{dc}{dx}=xe^{-x^2}$

$-e^c\cdot dc=xe^{-x^2}dx$

$-e^c=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+k$

$e^c=\frac{1}{2}e^{-x^2}+k=e^{-x^2-\ln 2}+k$

$c=-x^2-\ln 2+\ln|k|$

$y(x)=e^{-x^2}+e^{-x^2-\ln 2+\ln k};\quad \cancel{y=2e^{-x^2}}$

$y = e^{-x^2} \cdot (e^{\ln k - \ln 2}) = e^{-x^2} \cdot (k$

(Отв.: $y = \frac{x^2}{2} e^{-x^2} + c e^{-x^2}$)

$\boxed{4}$ $y' + xy = xy^3$

1) $\frac{dy}{dx} = -xy$;

$\frac{dy}{y} = -x dx$; $\ln|y| = \cancel{e} - \frac{x^2}{2} + c$;

$y = c e^{-\frac{x^2}{2}} = c \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x)$;

2) $dy = (u'v + v'u) dx \Rightarrow \quad u'v + v'u + x \cdot u \cdot v = xy^3$;

$u'v + c \cdot u \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot u \cdot c e^{-\frac{x^2}{2}} = x u^3 v^3$;

$\frac{du}{dx} v = x \cdot u^3 \cdot v^3$; $v = c e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\frac{du}{dx} = x \cdot u^3 \cdot c^2 e^{-x^2}$;

$\frac{du}{u^3} = c^2 x e^{-x^2} dx$;

$-\frac{1}{2u^2} = -c^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-x^2}$; $\frac{1}{u^2} = 3c^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \cancel{m}\ 3$

$y = c e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{3}{2} c^2 e^{-x^2} = \tilde{c} e^{-\frac{3}{2} x^2}$

(Отв.: $y^2 = u^2 v^2 = \frac{1}{e^{x^2} \cdot (c + e^{-x^2})} = \frac{1}{c e^{x^2} + 1}$).

</ Семинар>

< Линейная алгебра>

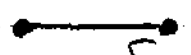
Теория графов

 — молекула бутадиена

 — граф

<u>Граф</u> – совокупность вершин. (V)

Различают упорядоченные и неупорядоченные пары вершин. (<u>дуги</u> и <u>ребра</u> соответственно).


ребро

дуга

<u>Ориентированный</u> граф содержит по кр. мере одну упорядоченную пару вершин. <u>Неориентированный граф</u> состоит только из ребер.

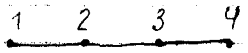
Граф можно задать:

а) графически

б) <u>матрицей смежности</u>: $A = \| a_{ik} \|$, где

$a_{ik} = a_{ki} = \mu$, если i- и k- вершины соединены ребром <u>кратности</u> μ.

Построим матрицу связности для графа:



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.о., задан <u>хюккелевский граф</u> (для сопряженной органической молекулы)

$$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_G(\lambda) = (-1)^n \cdot \underbrace{\det(A - \lambda E)}_{\text{характеристический полином}}, \quad n = \dim A_G$$

$P_G(\lambda) = 0 \Rightarrow$ спектр графа (набор чисел), который имеет химическое значение — спектр π-электронов в приближении Хюккеля: $E_\pi = \alpha + x\beta$, $x = -\lambda$.

$x=-\lambda;\ \det(A-\lambda\cdot E)=$

$$=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\cdot(x^3-2x)-(x^2-1)=x^4-3x^2+1=P_G(\lambda)$$

$$P_G(\lambda)=\lambda^4-3\lambda^2+1.$$

Для линейных цепочек введено обозначение:

$$D_n(x)\equiv \det(A+x\cdot E);$$

$$D_4(x)=x^4-3x^2+1=0$$

$$x=t^2;\quad t^2-3t+1=0$$

$$D=9-4=5;$$

$$t_1=\frac{3+\sqrt5}{2},\ t_2=\frac{3-\sqrt5}{2}$$

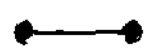
$$x^2=\frac{3\pm\sqrt5}{2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{6\pm2\sqrt5}{4}=\frac{1+5\pm2\sqrt5}{4}=\frac{(1\pm\sqrt5)^2}{4};$$

$$x=\pm\frac{1\pm\sqrt5}{2};$$

$$x_1=-\frac{1+\sqrt5}{2},\ x_2=-\frac{1-\sqrt5}{2},\ x_3=\frac{1-\sqrt5}{2},\ x_4=\frac{1+\sqrt5}{2}.$$

Решим характ. уравнение для любого n:

$n=1$ $D_1(x)=x$

$n=2$  $D_2(x)=x^2-1$

$n=3$ $D_3(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}=x^3-2x$

$n=4$ $D_4(x)=x^4-3x^2+1$

$n=5$

Рассчитаем теперь хюккелевские спектры:

$n=1,\ x=0$

$n=2,\ x=-1,\ x=1$

$n=3,\ x=-\sqrt2,\ 0,\ \sqrt2$

$n=4,\ x=\frac{-1-\sqrt5}{2},\ x=\frac{-1+\sqrt5}{2},\ x=\frac{1-\sqrt5}{2},\ x=\frac{1+\sqrt5}{2}$

Проверим закономерность:

$$x = 2\cos\frac{\pi k}{n+1}$$

$n=1$: $\cancel{x = 2\cos \pi k =}$ $x = 2\cos\frac{\pi k}{2} = \pm 1$

$n=2$: $x = 2\cos\frac{2\pi k}{3} = \pm 1$

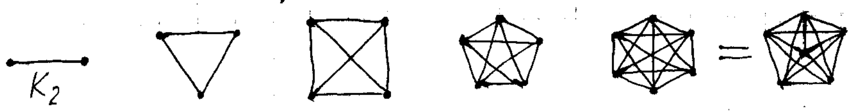
$n=3$: $x = 2\cos\frac{\pi k}{4} = \{\pm 1, 0\}$

$n=4$: $x = 2\cos\frac{\pi k}{5}$; $\quad 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$2\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$2\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Докажем предположение методом мат. индукции:

$\boxed{\text{ЭКЗ}}$ Рассмотрим полные графы:



K_3 $\quad$ K_4 $\quad$ K_5 $\quad$ K_6 $\quad$ ...

(граф тетраэдра)

Рассчитать спектры графов K_2, K_3, K_4 и, полагаясь на них, предположить спектры K_5, K_6 (прибавить 1-ю строч ...

?

рассчитать

$\lambda = 2\cos\frac{2\pi k}{n}$ — проверить!

Предположим, что при n верно: $x = 2\cos\frac{2\pi k}{n+1}$.

Лемма. $D_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$. Док-во:

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \cdot D_3(x) - D_2(x)$$

Гипотеза: $D_n = x\cdot D_{n-1} - D_{n-2}$

$D_1(x) = x$; замена: $x = 2\cos\varphi$;

$D_1(2\cos\varphi) = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$;

$D_2 = x^2 - 1 = 4\cos^2\varphi - 1 = 4\cos^2\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \ldots =$

$[\, e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi -$

$- i\sin^3\varphi$; $\cancel{\cos 3\varphi = \cos^3\varphi}$ $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi(1-\sin^2\varphi) - \sin^3\varphi\,] =$

$=$

$$D_{n+1}(2\cos\varphi) = 2\cos\varphi\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - 2\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = 2\cdot\frac{\sin n\varphi + \sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi} -$$

$$- 2\cdot\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}.$$

</ Линейная алгебра>

19.02.04.
§2

Линейное ДУ: $L_n[y] = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\cdot y^{(n-k)}(x) = f(x)$;

задача: $\begin{cases} f(x) = L_n[y] \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$

Если на $[a;b]$ ф-ции $p_k(x)$ (и $f(x)$!) непрерывны, то справедлива теорема существования и единственности, т.е. существует единственная ф-ция $y(x)$, удовлетворяющая ДУ и начальным условиям. Предполагая $p_0(x) \neq 0$, получим ДУ следующего вида:

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot y(x) = f(x),$$

которое и будем рассматривать в дальнейшем.

Рассмотрим однородное ДУ:

$f(x)=0$,

$$\begin{cases} L_n[y]=0 \\ y(x_0)=y_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Утв. Если имеется конечное число решений ЛДУ, то любая их комбинация (линейная) есть также решение ЛДУ:

$$y_k(x),\ k=\overline{1,m}: L_n[y_k]=0 \Rightarrow \forall c_k: L_n[\sum c_k y_k]=0 \qquad (*)$$

Предположим, что имеются ф-ции $y_1(x)\dots y_k(x)$, которые в $X=[a;b]$ линейно независимы.

$(c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ky_k=0 \Leftrightarrow c_i=0,\ \forall i=\overline{1,k})$

(В X непрерывны коэффициенты $p_k(x)$).

Возьмем ровно n таких ф-ций: $y_1\dots y_n$. Предположим, что каждая ф-ция имеет по крайней мере $(n-1)$ производных: $\exists y_i^{(n-1)}(x),\ \forall x\in X$. Составим такой определитель:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

(Определитель Вронского).

Рассмотрим свойства этого определителя: $W[y_1\dots y_n]$.

Предположим, что система ф-ций $y_1\dots y_n$ $(\{y_k(x)\})$ линейно зависима, т. е. $\exists c_k,\ \forall i: c_i\neq 0: c_1y_1+\dots+c_ny_n=0$

Тогда: $W[y_1\dots y_n]=0,\ \forall x\in X$.

Пусть $c_n \neq 0$ (не умаляя общности): $\exists\, \tilde{c}_1 \dots \tilde{c}_n,\ \tilde{c}_n \neq 0$:
$\tilde{c}_1 y_1 + \dots + \tilde{c}_n y_n \neq 0$. Тогда: $y_n(x) \equiv -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\tilde{c}_k}{\tilde{c}_n} y_k(x) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n-1} d_k \cdot y_k(x)$.
Т.е., одну ф-цию выразили через другие. Отсюда следует, что: $y_n^{(\ell)}(x) = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} d_k y_k^{(\ell)}(x)$. Т.о., n-й столбец есть линейная комбинация остальных столбцов:

$$W = \begin{array}{c} \begin{matrix} (d_1) & (d_2) & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & 0 \\ y_1' & y_2' \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (**)$$

Что будет W, если система $\{y_i(x)\}$ линейно независима? Оказывается, что:

$\{y_k\}$ линейно зависима $\Rightarrow W = 0$

$\{y_k\}$ линейно независима $\not\Rightarrow W \neq 0$

(см. примеры).

<u>Пример</u>: $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}$,

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1 = -2,\ \forall x$$

<u>Пример</u>. $y_1 = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$; $y_2 = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

$W = 0$, хотя ф-ции линейно независимы.

Если $\{y_k\}$ линейно независимы, то, если $\{y_k\}$ — решения ЛДУ ($k = \overline{1,n}$), то $W[y_1 \dots y_n] \neq 0$. Предположим, что: $\exists\, x_0 \in X$: $W(x_0) = 0$. Рассмотрим решения $\{y_k\}$ в точке x_0:

$y_k^{(\ell)}(x_0) = \overline{y}_k^{(\ell)}$. Обозначено n^2 чисел: $\ell = \overline{0,(n-1)}$; $k = \overline{1,n}$.

$$
\begin{array}{cccc}
\vec{y}_1^{(0)} & \vec{y}_2^{(0)} & \ldots & \vec{y}_n^{(0)} \\
\vec{y}_1^{(1)} & \vec{y}_2^{(1)} & \ldots & \vec{y}_n^{(1)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vec{y}_1^{(n-1)} & \vec{y}_2^{(n-1)} & \ldots & \vec{y}_n^{(n-1)} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
n & n & & n
\end{array}
\qquad \vec{y}_1,\ \vec{y}_2, \ldots \vec{y}_n
$$

$$\underbrace{n \quad n \quad n}_{n} \Big\} \ n^2.$$

Рассмотрим систему равенств:

$c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 + \ldots + c_n\vec{y}_n = \vec{0}$. Можно ли найти такие c_k?

Матрица системы:

$\hat{A} = W(x_0) = 0$ согласно предположению.

$\exists$ нетривиальное решение: $\|\vec{C}\| \neq 0$.

Рассмотрим ф-цию: $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k \overset{(*)}{\Rightarrow} L_n[\bar{y}] \equiv 0.$

При этом $\bar{y}(x_0) = 0$

$\bar{y}'(x_0) = 0$

$\bar{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$

(задача Коши).

По теореме о существовании и единственности, решение $\bar{y}$ единственно.

Т.о., если: $\{y_k(x)\}$ — решения ЛДУ, то:

$\forall x \; W(x)=0$

или

$\forall x \; W(x)\neq 0.$ $\qquad\qquad (****)$

Опр. Фундаментальной системой решений ЛДУ наз. n линейно независимых ф-ций (базис).

Теорема 5. Дано ЛДУ. Всегда существует базис.

■ $L_n[y]=0$;

$\{\hat{y}_k(x)\}$ — базис — обязательно существует.

Возьмем любые (n^2) чисел, таких, что составленный из них определитель $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \dots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\hat{y}_k(x): \; L_n[\hat{y}_k(x)]=0 \; ; \; y_k^{(\ell-1)}(x_0)=a_k^{\ell-1}$. По теореме о существовании и единственности, $\exists!\, \hat{y}_k(x)$: удовлетворяет задаче (n ф-ций). Эти ф-ции — базис. (Они линейно независимы, ибо $W(x_0)\neq 0$). ■

Теорема 6. Любое решение ЛДУ может быть выражено линейной комбинацией базиса:

$y(x)$ — решение ЛДУ $\Longrightarrow \exists!\, \vec{c}=\{\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_n\}: \; y(x)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{c}_k\hat{y}_k$.

■ Возьмем $x_0 \in X$ — решение существует.

Рассмотрим: $y^{(l-1)}(x_0)$, $l=\overline{1,n}$ — значения ф-ций в точке x_0.

Можно ли подобрать $\hat{C}_k$ таким образом, чтобы:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \hat{C}_k \hat{y}_k^{(l-1)} = y^{(l-1)}, \quad l=1..n. \right.$$

Т.о., т.к. $W(x_0)=\hat{A} \neq 0$, $\forall x \in X$, то $\exists! \vec{\hat{C}}$.

Видно, что $\hat{y}=\sum \hat{C}_k \hat{y}_k$ и y имеют одинаковые начальные условия: $y_k(x_0)=y_{k(0)}$, т.е. $\hat{y} \equiv y$ — решения суть одинаковы. ■

Из проведенных рассмотрений видно, что главное при решении ЛДУ — построить базис. Решение задачи Коши переходит из пространства функционального в пространство векторное ($\mathcal{R}_n : \vec{\hat{C}}_k$).

ЛДУ с постоянными коэффициентами

$$p_k(x) = a_k \text{ — числа (Const)}$$

Будет ли ф-ция $y=e^{\lambda x}$ решением ОЛДУ?

$$L_n[(e^{\lambda x})] = \sum_{i=0}^{n} p_i \cdot \lambda^{n-i} e^{\lambda x} = 0$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то $e^{\lambda x}$ будет решением ОЛДУ, если λ таково, что:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} p_i \underline{\underline{\lambda}}^{n-i} = 0.} \text{ — характеристическое уравнение}$$

Характеристическое уравнение — уравнение n-й степени.

Если ХУ имеет n различных вещественных корней, то получим базис $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$

Если корни ХУ кратные, то /см. литературу/:

λ_k — корень кратности $S \Rightarrow \exists S$ решений: $x^{\nu} e^{\lambda_k x}$, $\nu = \overline{0.(S-1)}$, причем эти s решений:

$e^{\lambda x}$ $x e^{\lambda x}$ ... $x^{s-1} e^{\lambda x}$ — линейно независимы.

Т.о., базис можно (в случае вещественных корней) находить путем решения ХУ. В случае комплексных корней выделяют действительные части:

$e^{\lambda x} = u(x) + i v(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$e^{i\lambda x} = (\cos\lambda x \pm i \sin\lambda x) \cdot e^{\lambda x}$

$L_n[u \pm iv] = 0 = L_n[u] \pm i L_n[v] \Leftrightarrow \begin{cases} L_n[u] = 0 \\ L_n[v] = 0 \end{cases}$,

т.е. если $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — решение ОЛДУ, то и „u", и „v" — решения:

$e^{\alpha x} \cos\beta x \pm e^{\alpha x} \sin\beta x$ ($\lambda = \alpha \pm i\beta$)

Итак, вопрос построения базиса ОЛДУ решен.

Неоднородные уравнения

$\sum_{i=0}^{n} p_i \lambda^{n-i}$; λ кратности S: $x^{\nu} e^{\lambda x}$, $\nu = \overline{0, S-1}$

$\lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda = \alpha \pm i\beta$: $\cos\beta x \cdot e^{\alpha x} \pm i e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$

Предположим, что известно одно решение ЛНДУ: $Y(x)$

$L_n[Y] = f(x)$. Будем искать решение в виде: $y(x) = Y(x) + u(x)$;

$u(x) = y - Y$; $L_n[u] = L_n[y - Y] = L_n[y] - L_n[Y] = f - f \equiv 0$;

u — решение ОЛДУ: $L_n[u] = 0$. Общее решение y:

$$y = \sum \hat{C}_k y_k + Y$$

$\hat{C}_i$ можно найти, задав начальные условия:

$$\begin{cases} y(x_0) = \\ y'(x_0) = \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \end{cases},$$

$$\hat{A} = W(x_0) \neq 0 .$$

Т.о., найдено общее решение НЛДУ, т.е. такое, из которого может быть получено любое решение ЛДУ по начальным условиям. Как найти частное решение НЛДУ?

Метод вариации постоянных

$L_n[Y] = 0$, $Y - ?$

Зная базис, можно, оказывается найти частное решение. $\hat{C}_k = \hat{C}_k(x)$ подбирают так, чтобы они вместе с y_k давали бы частное решение НЛДУ:

$$Y(x) = \hat{C}_1(x) \cdot \hat{y}_1(x) + \dots + \hat{C}_n(x) \cdot \hat{y}_n(x) .$$

$$Y'(x) = \underbrace{\hat{C}_1' \cdot \hat{y}_1 + \dots + \hat{C}_n' \hat{y}_n}_{=0 \text{ (будем считать, что } \hat{C} \text{ именно такие)}} + \hat{C}_1 \hat{y}_1' + \dots + \hat{C}_n \hat{y}_n$$

$$Y''(x) = \hat{C}_1 \hat{y}_1'' + \dots + \hat{C}_n \hat{y}_n'' + \underbrace{\hat{C}_1' \hat{y}_1' + \dots + \hat{C}_n' \hat{y}_n'}_{=0 \ ()}$$

$$\dots$$

$$Y^{(n-1)} = \hat{C}_1 \hat{y}_1^{(n-1)} + \dots + \hat{C}_n \hat{y}_n^{(n-1)} + \underbrace{\hat{C}_1' y_1^{(n-2)} + \dots + \hat{C}_n' y_n^{(n-2)}}_{=0}$$

$$Y^{(n)} = \hat{C}_1 \hat{y}_1^{(n)} + \dots + \hat{C}_n \hat{y}_n^{(n)} + \hat{C}_1' \hat{y}_1^{(n-1)} + \dots + \hat{C}_1' \hat{y}_1^{(n-1)} + \dots \hat{C}_n' \cdot \hat{y}_n^{(n-1)}$$

<Семинар> ЛОДУ.

$\boxed{1}$ $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0$ — ЛОДУ

$y=e^{\lambda x}$

$\lambda^n+a_1\lambda^{(n-1)}+\ldots+a_n=0$ — ХУ

$a_i\in\mathbb{R}\Rightarrow$ комплексные корни сопряжены

— действительный корень кр. μ: — μ линейно незав. решений:

$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ldots,x^{\mu-1}e^{\lambda x}.$

— комплексный корень: $\lambda=\alpha\pm i\beta$: $y_1=e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)$

$y_2=xe^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)$

$\ldots$

$y_\mu=x^{\mu-1}\cancel{x}\,e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)$

$\lambda=\alpha+i\beta$ кр. 1 порождает пару решений:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

$\boxed{1}$ $y^{(4)}+y''+6y'+4y=0$

$\lambda^4+\lambda^2+6\lambda+4=0$ | $\lambda+2$

$\lambda^4+2\lambda^3$ | $\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda$

$-2\lambda^3+\lambda^2+6\lambda+4$

$-2\lambda^3-4\lambda^2$

$5\lambda^2+6\lambda+4$

$5\lambda^2+10\lambda$

$-4\lambda+$

$\lambda^4+\lambda^2+6\lambda+4=0$ | $\lambda+1$

$\lambda^4+\lambda^3$ | $\lambda^3-\lambda^2+2\lambda+4=0$

$-\lambda^3+\lambda^2+6\lambda+4$

$-\lambda^3-\lambda^2$ ~~$+6\lambda+4$~~

$2\lambda^2+6\lambda+4$

$2\lambda^2+2\lambda$

$4\lambda+4$

$4\lambda+4$

0

$\lambda^3+2\lambda-(\lambda^2-4)=\lambda(\lambda^2+2)-(\lambda+2)(\lambda-2)$

Схема Горнера

	1	0	1	6	4
−1	1	−1	2	4	0
−1	1	−2	4	0	

$\lambda^4+\lambda^2+6\lambda+4=0$

$\lambda_1=-1$

$\lambda^2-2\lambda+4=0$

$D=4-16=-12;\ \lambda_{1,2}=\frac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$

$e^{-x},\ xe^{-x},\ e^x\cos\sqrt{3}x,\ e^x\sin\sqrt{3}x$

$y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^x\cos\sqrt{3}x+c_4e^x\sin\sqrt{3}x.$

$\boxed{2}$ $y^{IV}+2y''+y=0$

$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$\lambda^2=-1;\ \cancel{\lambda_{1,2}=\pm1,\ \lambda=\pm\sqrt{-1}}=\pm i$

~~$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$~~

$\lambda_{1,2}=i,\ \lambda_{3,4}=-i$

$y=c_1\cos x+c_2x\cos x+c_3x\sin x+c_4\sin x$

ЛНДУ с постоянными коэффициентами

$n=2$

$y_0(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ — решение ОЛДУ.

$y_0'=\underbrace{c_1'y_1+c_2'y_2}_{=0}+c_1y_1'+c_2y_2'$

$y_0''=\underbrace{c_1'y_1'+c_2'y_2'}_{=f(x)}+c_1y_1''+c_2y_2''$

$y''+a_1y'+a_2=f(x)$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{W} = -\frac{y_2 \cdot f}{W} \\ c_2' &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{y_1 \cdot f}{W} \end{aligned}}$$

$\boxed{3}$ $y'' - 2y' + y = e^x / x^2$

1. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda = \pm 1$

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^{+x} \qquad W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$c_1' = -\frac{e^{-x} \cdot e^x}{x^2 \cdot (-2)} = \frac{1}{2x^2}, \; c_2' = \frac{e^x \cdot e^x}{x^2 \cdot (-2)} = \frac{e^{2x}}{-2x^2};$$

$$c_1 = -\frac{1}{2x} + \bar{c}_1 ; \; c_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{x} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int \frac{e^{2x}}{x} dx =$$

$u = e^{2x}$ $\qquad v = \ln|x|$ $\qquad u = e^{2x}$ $\Big|$ $v = -\frac{1}{x}$

$dv = \frac{1}{x} dx$ $\qquad du = 2e^{2x} dx$ $\qquad dv = \frac{1}{x^2}$ $\Big|$ $du = 2e^{2x}$

$$= \frac{e^{2x}}{2x} + e^{2x} \ln|x| - 2\int e^{2x} dx = \ldots - e^{2x} + \bar{c}_2$$

$$y = \left(c_1 - \frac{1}{2x}\right) e^x + \left(\frac{e^{2x}}{2x} + e^{2x} \ln|x| - e^{2x} + \bar{c}_2\right) e^{-x}.$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x} + x e^{2x} - x e^{2x} = e^{2x}$$

$$c_1' = -\frac{x e^x \cdot e^x}{x^2 \cdot e^{2x}} = -\frac{1}{x} \; ; \; c_2' = \frac{e^x \cdot e^x}{x^2 \cdot e^{2x}} = \frac{1}{x^2};$$

$$c_1 = -\ln|x| + \bar{c}_1 \; ; \; c_2 = -\frac{1}{x} + \bar{c}_2$$

$$y = (c_1 - \ln|x|) e^x + \left(c_2 - \frac{1}{x}\right) x e^x = c_1 e^x - e^x \ln|x| + c_2 x e^x - c_2 e^x =$$

$$= \bar{c}_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \ln|x|.$$

Решение по „методу Новикова".

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2}$$

$$y_0=c_1(x)e^x+c_2(x)\cdot xe^x=e^x(c_1+xc_2)=ce^x$$

$$(ce^x+c'e^x)'-2ce^x-2c'e^x+ce^x=\frac{e^x}{x^2}$$

$$\cancel{c'e^x}+\cancel{ce^x}+c''e^x+\cancel{c'e^x}-\cancel{2ce^x}-\cancel{2c'e^x}+\cancel{ce^x}=\frac{e^x}{x^2}$$

$$c''=\frac{1}{x^2}\quad,c'=-\frac{1}{x}+c_1\quad,c=-\ln|x|+c_1x+c_2$$

$$y=(-\ln|x|+c_1x+c_2)e^x.$$

Обобщение на ДУ 2-го порядка:

$$y''=c'e^x+ce^x+c''e^x+c'e^x=(c''+2c'+c)e^x$$

$$y'=(c'+c)e^x$$

$$y=ce^x$$

~~$y''-2y'$~~

$$(\lambda-a)^2=0\Leftrightarrow\lambda^2-2a\lambda+a^2=0\quad,\lambda=a;$$

$$y''-2ay'+a^2=\frac{e^{ax}}{x^2}$$

$$y_0=c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}$$

$$\tilde{y}=c(x)e^{ax}\ \ldots\quad c''=\frac{f(x)}{x^2}$$

$$(\lambda-a)^n=0\quad\lambda^n+C_n^1\lambda^{n-1}a+C_n^2\lambda^{n-2}a^2+\ldots+C_n^k\lambda^{n-k}a^k+\ldots+C_n^na^n$$

$\boxed{\text{HOME}}$

Решить 2 способами:

$$y^{(5)}+5y^{(4)}+10y^{(3)}+10y^{(2)}+5y^{(1)}+y^{(0)}=x^3e^{-x}$$

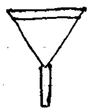
$\boxed{\text{TRAINING}}$

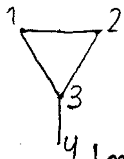
$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^2}\quad(2\text{ способа})$$

$\left[\; y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}\right.$ ~~(2 способо~~

< 1 Семинар >

< Теория графов >

1  (метиленциклопропен)

граф: 

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$D_n(x)=\begin{vmatrix}x&1&1&0\\1&x&1&0\\1&1&x&1\\0&0&1&x\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x&1&0\\1&x&0\\1&1&1\end{vmatrix}+x\cdot\begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}=$$

$$=1-x^2+x\cdot(x^3+1+1-x-x-x)=1-x^2+x\cdot(x^3-3x+2)=$$

$$=1-x^2+x^4-3x^2+2x=x^4-4x^2+2x+1,$$

$$P_G(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^2-2\lambda+1;\quad \lambda=-1$$

$$\lambda^4-4\lambda^2-2\lambda+1 \;\big|\; \lambda+1$$

$$\lambda^4+\lambda^3 \qquad \lambda^3-\lambda^2-3\lambda+1 \quad (MAPLE: FSolve)$$

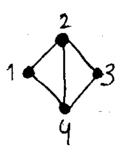
$$-\lambda^3-4\lambda^2-2\lambda+1$$

$$-\lambda^3-\lambda^2$$

$$-3\lambda^2-2\lambda+1$$

$$-3\lambda^2-3\lambda$$

$$\lambda+1$$

2 

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\cancel{P_G(\lambda)}\quad D_n(x)=\begin{vmatrix}x&1&0&1\\1&x&1&1\\0&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&x&1\\0&1&x\\1&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=x(x^3+1+1-x-x-x)-(x^2-1+1-x)-(1+x^2-1-x)=$$

$$=x(x^3+2-3x)\cancel{+}-(x^2-x)-(x^2-x)=x^4+\cancel{2x}-3x^2-2x^2-\cancel{2x}=x^4-5x^2.$$

$$P_G(\lambda)=\lambda^4-5\lambda^2.$$