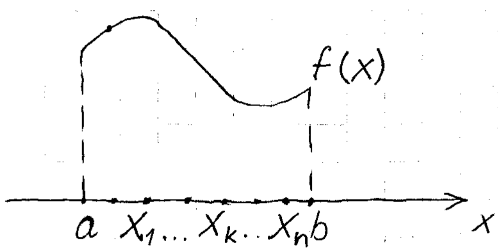
Численные методы

$\boxed{1}$ 2.09.2004

Интерполяция



Постановка задачи

$f(x)$ определена на $[a;b]$. Её вид неизвестен. Даны n точек ($[a;b]$) $x_1 \ldots x_n$. Даны значения ф-ции $f(x_k)$. Ср.: эксперимент.

? $\quad \forall x \in [a;b] \to f(x)$?

Найти алгоритм нахождения $\tilde{f}(x)$ по любому x, указать погрешность определения.

Решение

Построим некоторую ф-цию, наиболее простую: многочлен. Найдем такой многочлен, чтобы:

$\forall x_k \in [a;b]: \quad P_n(x_k) = f(x_k)$, т.е. значения многочлена в x_k совпадают со значениями ф-ции в этих точках.

$$P_{m-1}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^{i-1}$$

$$\left\{ P_{m-1}(x_k) = f(x_k) \quad , k = \overline{1,n} \right.$$

Линейная система с n уравнениями и m неизвестными.

Возьмем $m=n$, получим 'квадратную' систему.

Определитель системы — определитель Ван-дер-~~Ворда~~ Монда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ \dots & & \dots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Он $\neq 0 \iff x_k$ все разные.

Система имеет ед. решение.

Найденный многочлен наз. интерполяционны многочленом Лагранжа.

x_k наз. узлами интерполяции.

$f(x) \approx L_n(x)$

$r_n(x) = f(x) - L_n(x)$

$|r_n(x)| \leq ?$

Как найти $L_n(x)$? Можно найти $L_n(x)$, не решая системы. Найдем $L_n(x)$: $\forall x \in [a;b]$.

Введем вспомогательные многочлены:

$\Phi_j(x)$ (степени $n-1$; j — индекс).

рассмотрим $n-1$ штук $\varphi_j(x)$, удовлетворяющих условию:

$$\varphi_j(x_k)=\delta_j^k \left(=\begin{cases} 0, & k\neq j \\ 1, & k=j \end{cases}\right).$$

$$\varphi_j(x)=C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)$$

$$C:\quad \varphi_j(x_j)=1.$$

$$\varphi_j(x)=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\frac{x-x_l}{x_j-x_l}$$

ЛК $\varphi_j(x)$ есть многочлен степени n:

$$\sum_{k=1}\ \sum_{m=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\varphi_j(x) = \tilde{P}_{n-1}(x)$$

$$\tilde{P}_{n-1}(x_k)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\varphi_j(x_k)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\delta_j^k=f(x_k).$$

$\exists!$ $L_n(x)$, и он найден. Т.о.,

$$L_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

Оценка погрешности

Рассмотрим вспомогательную ф-цию:

$\omega_n(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$; рассмотрим ф-цию:

$n+1$ равенств

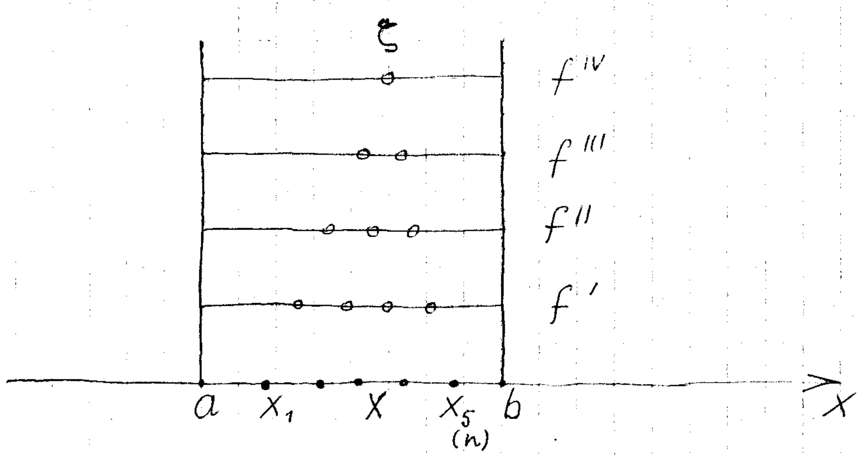
$$\begin{cases}\varphi(t)=\underbrace{f(t)-L_n(t)}_{\text{"}r(t)\text{"}}-K\,\omega_n(t), \quad K-\text{Const}.\\ \varphi(x_1)=0\\ \ldots\\ \varphi(x_n)=0 \qquad \Rightarrow \exists\,\xi\in[a;b]:\ \varphi^{(n)}(\xi)=0.\end{cases}$$

Подберем K:

$\varphi(x)=0$: $\qquad K=\dfrac{f(x)-L_n(x)}{\omega_n(x)}$; $\quad K\neq 0$,

x – не корень.

$$\frac{r(x)}{\omega_n(x)}$$



Теорема Ролля:

Если ф-ция на отрезке непрерывна, а на интервале дифференцируема, и если на концах отрезка она принимает равные значения, то внутри отрезка найдется такая точка, что в ней производная ф-ции равна нулю.

$$\varphi^{(n)}(\xi) = 0 = f^{(n)}(\xi) - 0 - K \cdot n! \quad (\omega_n(x) = x^n + \ldots)$$

$$K = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_n(x)};$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,\omega_n(x);$$

$$\boxed{|r_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{n!}\,\|\omega_n(x)\|,}$$ где $\|f^{(n)}(x)\| \leqslant M_n$

$\|\ \| - \max|\ |$

Есть шанс, что с ростом n ошибка интерполяции будет убывать.

На практике часто оказывается возможным <u>оценить</u> $f^{(n)}(x)$.

Можно ли так выбрать x_k, чтобы оптимизировать погрешность? — Можно (!). (ω_n определяется x_n). (В ω_n входят параметры x_k — n штук).

$$|r_n(x)| \leq \frac{M_n}{n!}\|\omega_n(x)\|.$$

1) Рассмотрим: Ot $-1 \leq t \leq 1$;

многочлены Чебышева:

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = t$$

$$T_{n+1}(t) = 2t \cdot T_n(t) - T_{n-1}(t).$$

Т. н., $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $T_3(t) = 4t^3 - 2t - t = 4t^3 - 3t$...

2) Теперь, $\cancel{\cos\alpha +} \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\alpha$

$$\beta = (n+1)\theta, \quad \alpha = (n-1)\theta;$$

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta - \cos(n-1)\theta;$$

$$\cos\theta \equiv t; \qquad \theta = \arccos t$$

$$\cos[(n+1)\arccos t] = 2t\cos(n\arccos t) - \cos((n-1)\arccos t)$$

Рассм. разностное уравнение:

$$z_{n+1} = 2t z_n - z_{n-1};$$

$$T_n(t) \equiv u_n;$$

$$u_{n+1} = 2t u_n - u_{n-1};$$

$$\cos(n\arccos t) \equiv v_n;$$

$$v_{n+1} = 2t v_n - v_{n-1};$$

$$\left.\begin{matrix} u_0 = 1 \\ u_1 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_n \qquad \left.\begin{matrix} v_0 = 1 \\ v_1 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_n;$$

Решение 'u' и 'v' ~~е~~ — одно и то же;

в силу его единственности. $T_n(t) = \cos(n\arccos t)$;

Можно найти экстремумы $T_n(t)$, нули.

$T_n(t)=0$; $t_m = \cos\frac{2m+1}{2n}\pi$, $m=0..n-1$.

$T_n(t)=\pm 1$; $t_m = \cos\frac{\pi m}{n}$; $m=0..n$

* $T_n(t)=\cos[n \arccos t]$.

Введем приведенный многочлен Чебышева:

$\overline{T}_n(t) = 2^{1-n}\cdot T_n(t) = t^n + \ldots$

<u>Лемма.</u> Среди всех многочленов n-степени со старшим коэф. $=1$ многочлен Чебышева $\overline{T}_n(t)$ наименее уклоняется от 0.

$\square$ $\forall P_n(t) = t^n+\ldots$: $\|P_n(t)\| \geq \|\overline{T}_n(t)\|$ (утв.)

Предп.: $\exists\, \widetilde{P}_n(t) = t^n+\ldots$: $\|\widetilde{P}_n(t)\| < \|\overline{T}_n(t)\|$.

Составим многочлен:

$Q(t) = \overline{T}_n(t) - \widetilde{P}_n(t)$. Степень Q не выше, чем $n-1$.

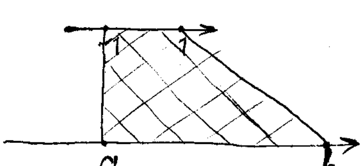
$\operatorname{sign} Q_{n-1}(\bar{t}_m) = \operatorname{sign} \overline{T}_n(\bar{t}_m) = (-1)^m$,

Q меняет знак $(n+1)$ раз $\Rightarrow$ n корней. $\blacksquare$

Сделаем замену: $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$;

$t = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$;

$x \updownarrow t$



В качестве узлов интерполяции надо взять точки:

$$x_m = \frac{b-a}{2}\cos\frac{2m+1}{2n}\pi + \frac{b+a}{2}.$$

[-1; 1]

$\omega_n = x^n + \ldots$. $\|\omega_n\| - \min \Leftarrow \omega_n = T_n$ на отр. $[a;b]$

тогда $|r_n(x)| \leq \frac{M_n}{n!}\|T_n(t(x))\|$.

*Легко понять, что многочлены с произвольным коэффициентом при старшем члене сравнивать нельзя. Ведь каждый многочлен имеет норму; помножив его на произвольное число, помножаем и норму, и норма тем самым произвольна. По этой причине в нашем рассмотрении и вводится приведенный многочлен Чебышева.

2 9.09.2004 Вычисления интегралов. Квадратурные формулы.

9. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin^2 x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{(x^3-1)^2}{\ln x}e^{-x^4}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

Обозначение задачи: $Lu=f$. ...

1 Дан интеграл:

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Квадратурная формула — линейный конечномерный функционал: (значений ф-ции)

$\in[a;b]$: x_k ; $f(x_k)$ (дано);
(узлы)

Квадратурная формула:

$$S_n\equiv\sum_{k=1}^{n}c_kf(x_k)$$

c_k — веса квадратурной формулы

$I=S_n+R_n$; $|R_n|\leqslant$?

Решение задачи:

1) узлы
2) веса
3) число узлов
4) погрешность.

Формулы Ньютона-Котеса

Древнейшие формулы.

Предположим, известны узлы квадратурной формулы. C_k?

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [f(x) - L_n(x) + L_n(x)]dx =$$

$$= \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b [f(x) - L_n(x)]dx;$$

$$S_n \equiv \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \sum_{k=1}^n \left[\int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx \right]$$

$$\cdot f(x_k) \cancel{dx} = \sum_{k=1}^n C_k^{(n)} f(x_k)$$ — квадратурная ф-ла;

$$C_k^{(n)} \equiv \int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx;$$

$$|R_n| \leq \int_a^b \left| [f(x) - L_n(x)] \right| dx = \int_a^b |r_n(x)| dx \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |\omega_n(x)| dx$$

С ростом n точность, естественно растет.

При использовании этих формул выяснилось, что в некоторых случаях с ростом n погрешность возрастала. Нет гарантии на точность расчетов по этим формулам.

$C_k^{(n)}$ — сложные функционалы от узлов.

Сумма весов равна длине отрезка:

$$f(x) \equiv 1;$$

$$I = b - a = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)}; \qquad \forall x_k$$

$$\exists ? \lim_{n\to\infty} \sum |C_k| \qquad \exists ? \lim \sum C_k \; ?$$

$$\exists \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} |C_k| = +\infty \quad (!)$$

Значит,

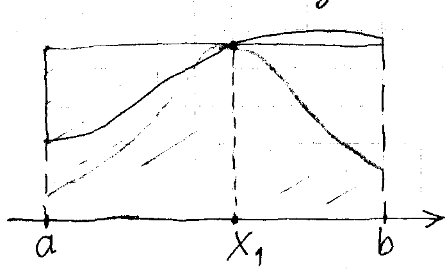
$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim} |\;| &= +\infty \\ \lim &= b-a \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ C_k разных знаков.

Если $f(x)$ непрерывна, то с весами близкие значения f вычитаются, что приводит к потере точности.

$$\begin{array}{r} -\boxed{2,3579}561 \\ \boxed{2,3579}563 \\ \hline \boxed{0,0000} \end{array}$$

Составные квадратурные формулы

Находят очень широкое применение. При малом n вычислить интеграл с высокой степенью точности нельзя:

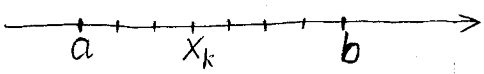


А если отрезок $[a;b]$ мал, то и погрешность будет мала.

Разобьем отрезок [a;b] на N равных частей:

$hN = b-a$

$x_k = a + (k-1)h$, $x_1 = a$.



Интеграл представим в виде:

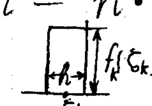
$$I = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \equiv \sum_{k=1}^{N} I_k; \quad I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

Можно сделать замену:

$x = a + (k-1)h + t$ $\qquad x: \; x_k .. x_{k+1}$

$dx = dt$; $\qquad t: \; 0 .. h$

$$I_k = \int_0^h f(a+(k-1)h+t)dt \equiv \int_0^h f_k(t)dt = h \cdot f_k(\zeta_k) + R_k$$

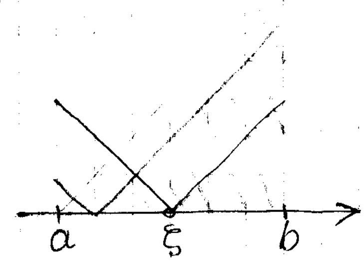


$$R_k = \int_0^h f_k(t)dt - h f_k(\zeta_k) = \int_0^h (f_k(t) - f_k(\zeta_k))dt \ominus$$

$$f_k(t) = f_k(\zeta_k) + f_k'(\xi)(t - \zeta_k)$$

$$\ominus \int_0^h \left[\cancel{f_k(\zeta_k)} + (t-\zeta_k) f_k'(\xi) - \cancel{f_k(\zeta_k)} \right] dt$$

$$|R_k| \le M_1 \cdot \int_0^h |t - \zeta_k| dt \le \frac{M_1}{2} h^2;$$



$$I = h \sum_{k=1}^{N} f_k(\zeta_k) + \sum_{k=1}^{N} R_k \; ;$$

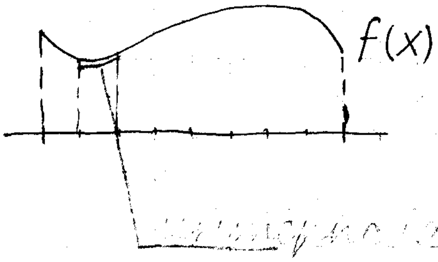
$$|R| \le \sum_{k=1}^{N} \frac{M_1 h^2}{2} = \frac{M_1 N h^2}{2} = \frac{M_1 (b-a)}{2} h = \frac{M_1 (b-a)^2}{2N} \le \varepsilon;$$

$N \ge \ldots$

(наперед заданная погрешность).

ξ_k — левые концы отрезков; 'средних отрезков' — наилучший рез-т; правые концы отрезков

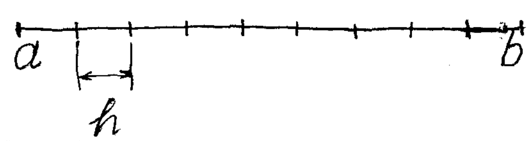
Сплайн



$\boxed{3}$ 16.09.2004

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = S_N + R_N(f)$$

Разобьем $[a;b]$ равномерно на n частей.

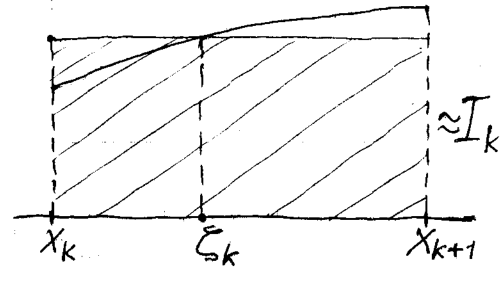


$x_k = a + (k-1)h$ $\qquad Nh = b-a$

$k = \overline{1,N}$ $\qquad$ (N выберем позже).

Тогда: $I = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$, $\quad I_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$

$I_k \cong h f(\xi_k)$



$(n=1)$

Ошибка$_k$:

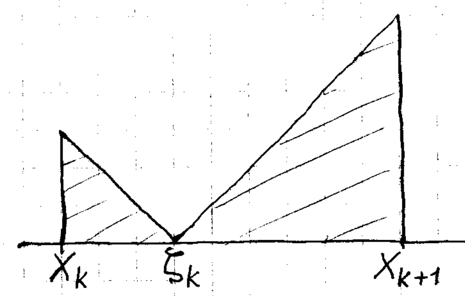
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - h f(\xi_k) =$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(\xi_k)]\,dx;$$ предп.: $f(x)$ имеет ограничен-

$$= \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} [f(\xi_k) + f'(\xi)(x-\xi_k) - f(\xi_k)]\,dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi)(x-\xi_k)\,dx \equiv R_k;$$

$$|R_k| \le M_1 \cdot \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |x-\xi_k|\,dx \quad , \; M_1: \; \|f'(x)\| \le M_1;$$

$$|R_k| \le \frac{M_1 h^2}{2}$$



$$S \le \frac{h^2}{2}$$

$$I = \sum_{k=1}^{N} (h f(\xi_k) + R_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} h f(\xi_k) + \sum_{k=1}^{N} R_k =$$

$$= h \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) + \tilde{R}_N;$$

$$|\tilde{R}_N| \le \sum_{k=1}^{N} |R_k| \le N \cdot \frac{h^2 \cdot M_1}{2} = \frac{M_1 (b-a)^2}{2N} = \frac{M_1(b-a)}{2} h$$

$$\frac{M_1(b-a)^2}{2N} \le \varepsilon;$$

$$N \ge \frac{M_1 (b-a)^2}{2\varepsilon}.$$

Можно вычислить интеграл с наперед заданной точностью.

ξ_k: левый / правый конец отрезка (ф-ла левых / правых прямоугольников); середина отрезка:

$$\xi_k = a + (k-1)h + \frac{h}{2} = a + \frac{2k-1}{2} h.$$

Пусть $\|f''(x)\| \le M_2$.

$$R_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} [f'(\xi_k)(x-\xi_k) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-\xi_k)^2]\,dx =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi_k)(x-\xi_k)\,dx}_{=0} + \frac{1}{2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi)(x-\xi_k)^2\,dx$$

$$|R_k| \leqslant \frac{M_2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-\xi_k)^2\,dx = \frac{M_2}{\cancel{8}}\,\frac{(b-a)^3}{24}\,h^3$$

$$|\tilde{R}_N| \leqslant N\cdot\frac{M_2\,\cancel{(b-a)^{3\,2}}}{24}\cdot h^3 = \frac{M_2(b-a)}{24}\,h^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{24N^2} \leqslant \varepsilon \leftarrow$$

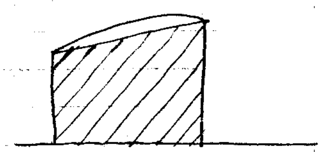
(ф-ла средних прямоугольников)

$$N^2 \geqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}; \qquad N \geqslant \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}}.$$

* * *

Формула трапеций:

$$I = h\,\frac{f(a)+f(b)}{2} + h\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \tilde{R}_N$$



$L_2(x)$

$$|\tilde{R}_N| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12N^2} \quad (\times 2)$$

* * *

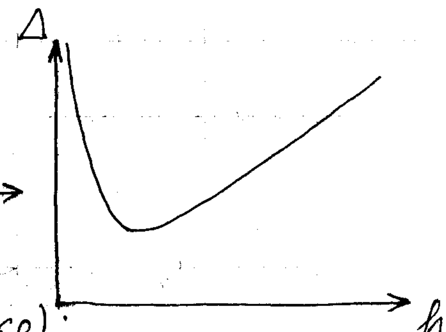
Вычислим (приближенно) $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \approx \frac{f(h)-f(0)}{h};$$

$f(h) = f(0) + hf'(0) + \bar{O}(h^2)$ если f'' огранич.;

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) + \underbrace{\bar{O}(h^2)}_{\frac{M_2}{2}h^2};$$

$\frac{\sin h}{h}$, $h_k = 2^{-k}$ (напр.) $\rightarrow$



$f(h) = f^*(h) + \varepsilon$ (на практике);

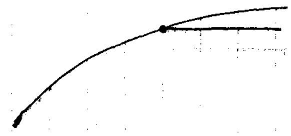
$$\frac{f^*(h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} + \frac{\varepsilon}{h} \qquad \boxed{\varepsilon:\ 0.0000}$$

ε — машинная точность;

$$\Delta = \frac{M_2 h^2}{2} + \frac{\varepsilon}{h}; \qquad h_0 = \sqrt[3]{} \qquad (\min).$$

Получим неустойчивость алгоритма.

$$\Big[\ \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} + C$$



Необходимо на практике вести расчет т.о., чтобы складывались величины одного порядка.

Тема устойчивости алгоритма в этой связи звучит особенно актуально: будет ли расти ошибка, допущенная в ходе выполнения алгоритма?

$|R_N|$ — ошибка метода;

Δ — ошибка расчета.

Надежда в том, что в многообразии алгоритмов данный алгоритм имеет малое Δ

* * *

Рассмотрим другой способ построения квадратур (квадратуры Гаусса), который трудно реализовывать, но который обладает практичностью.

Квадратурные формулы Гаусса

$$I = I(f) = \int_a^b p(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k) + R_n(f)$$

$p(x)$ — весовая ф-ция.

Обработка экспериментальных данных приводит к необходимости введения весовой ф-ции $p(x)$.

$0 \le p(x)$, $p(x)$ непрерывна.

Возьмем точки:

x_k, $k = 1..n$; n дано. Нельзя ли подобрать c_k и x_k, чтобы квадратурная формула была точна до многочлена высокой (как можно более) степени: ?

$$\int_a^b p(x)\, Q_k(x)\, dx = 0.$$

Можно: до $2n-1$. Выше, оказалось, нельзя.

Приведем наводящие соображения.

$$R_n(f) \equiv I(f) - S_N$$

$$R_n(P_m) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ R_n(x^i) \equiv 0,\ i = \overline{0,m} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_k^i = \int_a^b p(x)\, x^i\, dx, \quad x = \overline{0,m}; \right.$$

$$m + 1 \geqslant 2n$$

$$m \leqslant 2n - 1.$$

* * *

Оценим погрешность вычисления (R_k) I_k по ф-ле средних отрезков, при $|f''(x)| \le M_2$:

$$|R_k| \le \frac{M_2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-\xi_k)^2 dx = \left[\begin{array}{l} x = a+(k-1)h+t \\ dx = dt;\ x: x_{k}..x_{k+1};\ t: 0..h \end{array}\right]$$

$$= \frac{M_2}{2}\int_0^h \left(a+(k-1)h+t-a-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)^2 dt = \frac{M_2}{2}\int_0^h \left(t-\frac{h}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{M_2}{2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ht^2}{2}+\frac{h^2t}{4}\right]_0^h = \frac{M_2}{2}\left[\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{2}+\frac{h^3}{4}\right] = \frac{M_2h^3}{24}.$$

$\boxed{4}$ 23.09.2004

НР: 11.00, к. 370

Как выполнять задание?

План:

$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$, точность ε.

1) Доказать существование интеграла;
2) исследовать особые точки;
3) обрезать хвост интеграла:

$\int_a^A + \int_A^{+\infty}$, оценить этот хвост:

$\left|\int_A^{+\infty}\right| \le \varepsilon/2$, например. A как можно меньше.

4) по квадратуре: $\int_a^A$. В особых точках можно: $\left|\int_a^{a+\delta_1}\right| < \varepsilon_2$, δ как можно больше.

4) получить оценку погрешности квадратуры.
$f'(x)$ оценить как можно лучше.
5) вычислить N.

Как составить отчет?

1) Ф.И.О.
2) постановка задачи
3) обоснование сходимости интеграла
4) необходимые оценки:
→ A
→ $\delta_1, \delta_2, \delta_3$
→

5) выбор квадратурной формулы
6) оценка погрешности квадратуры, N?
7) таблица параметров

$A =$

$\delta_1 =$

$\vdots$

$\delta_k =$

$M_1^{(1)} =$

$\vdots$

$M_1^{(l)} =$

8) результаты расчетов:

$I_1 =$ $\quad N_1 =$

$\vdots$

$I_k =$ $\quad N_k =$

$I =$

9) правило Рунге:
→ описание правила

→ рез-ты счета по правилу:

$I_1 = \ldots \ , N_1 = \ldots$

. . . . .

$I = \ldots$

Требования к программе

Некоторые параметры задать внешними:
$A, \delta_1 \ldots \delta_k, N_1, N_2$

Начальник класса – Юрий Филиппович.
Количество цифр: '$\varepsilon+1$'
Сдать задание не позже 1 декабря!

$\boxed{5}$ 30.09.2004 Квадратура Гаусса

$$I \equiv I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx = S_n + R_n(f)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)$$

$$R_n(f) \equiv I(f) - S_n$$

$p(x) \geqslant 0$, непр. (можно: $p(x) \equiv 1$).

Подберем c_k, x_k т.о., чтобы для многочлена $P_m(x)$ квадратура была точна; притом степень m как можно больше:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i.$$

Нетрудно видеть, что:

$$R_n\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i R_n(x^i).$$

Отсюда следует:

$$\{ R_n(P_m)=0\} \Leftrightarrow \{ \forall i=\overline{0,n} : R_n(x^i)=0 \}.$$

Опр. Ортогональные многочлены:

$(f,g)=0$; $P_n(x)$ на $[a;b]$ ортогон. с весом $p(x)$: $\forall Q_m(x),\ m<n$: $(Q_m, P_n)=0$.

Опр. Скалярное произведение ф-ций $f(x), g(x)$:

$$(f,g) \equiv \int_a^b f(x)g(x)\,p(x)\,dx.$$

Лемма 1. Ортогональный многочлен определяется с точностью до пост. множителя; ортогональный многочлен существует и единственен для данной степени n:

$$P_n^0(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i x^i. \text{ (ортогональный)}.$$

□ $\{\forall m<n: (P_n^0, Q_m)=0\} \Leftrightarrow \{\forall i=\overline{0,n-1} : (P_n^0, x^i)=0\}$;

$$(P_n^0, x^i) \ominus \cancel{\sum_{j=0}^{n-1} p_j^0 x^j = x^n} \ominus \left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j^0 x^j, x^i\right) = -(x^i, x^n)$$

$$\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} p_j^0 (x^j, x^i) = -(x^i, x^n), \quad \forall i=\overline{0,n-1}. \right.$$

n уравнений с n неизвестными, линейными по неизвестным p_j. Система имеет единственное решение:

$G = \| (x^j, x^i) \|$, $\forall i,j=\overline{(0,n-1)}$ (определитель Грама).

$\{\varphi_k(x)\}$ - линейно независимы $\Leftrightarrow G=\|(\varphi_i,\varphi_j)\| \not\equiv 0$.

$\{x^k\}$, $k=\overline{0,n-1}$ — линейно независимы.

Отсюда единственным образом можно получить p_i, ч.т.д. ■

Лемма 2. Ортогональный многочлен имеет на $[a;b]$ n вещественных различных корней.

□ Предположим: на $[a;b]$ лежит в общей сложности меньше, чем n корней, которые могут быть кратными и комплексными: $m<n$. Выберем те корни, которые имеют нечетную кратность, и 'уберем' у них одну кратность:

$$(x-x_k)^{r_k};$$

$$P_n^0(x) = \underset{x\ не \in [a;b],\ x\ с\ четной\ кр.}{\Psi(x)\cdot\prod^{m_1}(x-x_k)},\quad m_1\le m$$

$$\forall x\in[a;b]:\ \Psi(x)\not\equiv 0,\ \Psi(x)\geqslant 0$$

Рассмотрим: $\left(P_n^0, \prod\limits_{k=1}^{m_1}(x-x_k)\right)=0=$

$$=\int_a^b p(x)\,\Psi(x)\prod(x-x_k)^2\,dx \equiv \int_a^b g(x)\,dx,\ \text{т.е.}$$

пришли к противоречию, значит, $m=n$ ■

$$P_n^0(x) = x^n+\sum_{j=0}^{n-1}p_j x^j \equiv (x-\tilde{x}_1)(x-\tilde{x}_2)\dots(x-\tilde{x}_n)\equiv\tilde{\omega}_n(x).$$

Предположим, корни многочлена найдены. Возьмем в качестве узлов квадратуры $\tilde{x}_k$.

Лемма 3. Если:

1) $x_k=\tilde{x}_k$
2) предп.: $c_k=\tilde{c}_k$: $\forall m<n$: $\tilde{R}_n(P_m)=0$.

То: $\forall m\le 2n-1$: $\tilde{R}_n(P_m)=0$

□ $P_{2n-1}(x) \equiv \tilde{\omega}_n(x) q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$

$$R_n(P_{2n-1}(x)) = R_n(\tilde{\omega}_n(x) q_{n-1}(x)) + \underbrace{R_n(r_{n-1}(x))}_{=0} =$$

$$= R_n(\tilde{\omega}_n(x) q_{n-1}(x)) = \int_a^b p(x)\, \tilde{\omega}_n(x) q_{n-1}(x)\, dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k \tilde{\omega}_n(\tilde{x}_k) q_{n-1}(\tilde{x}_k) = 0 - 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$ ■

— Можно ли подобрать $\tilde{c}_k$? —

Можно: возьмем в качестве весов веса формулы Ньютона - Котеса:

$$\tilde{c}_j = \int_a^b \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}\, dx.$$

Лемма 4. Не существует квадратурной формулы Гаусса, верной для $m > 2n-1$.

$\square$ Предп.: $\exists\ \hat{x}_k, \hat{c}_k$ для $m = (2n-1)+1 = 2n$:

$$R_n(\hat{P}_{2n}) = 0;$$

$$\hat{P}_{2n}(x_n^2) \equiv [\hat{\omega}_n(x)]^2$$

$$0 = R_n(\hat{P}_{2n}) = \underbrace{\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_n^2(x)dx}_{\geqslant 0} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \hat{c}_k \tilde{\omega}_n^2(\hat{x}_k)}_{=0} \neq 0. \blacksquare$$

$\boxed{6}$ 7.10.2004. Квадратура Гаусса (продолжение)

Квадратура Гаусса верна для любого многочлена степени $(n-1)$:

$$\left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_k^l = \int_a^b p(x) x^l dx \right.,\ l = 0\ldots(n-1) \quad (\text{Л. } 3 \Rightarrow \text{для } 2n-1).$$

(можно найти c_k).

Либо можно так найти c_k:

$$c_k = \int_a^b p(x) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n \frac{x-\hat{x}_j}{\hat{x}_k-\hat{x}_j}\,dx$$

(по методу Ньютона-Котеса).

Формулы Ньютона-Котеса подозрительны возможностью потери точности для определенных последовательностей узлов. А откуда мы знаем корни ортогонального многочлена?

Поэтому докажем

Лемму 5.

Для $\forall k$: $c_k > 0$.

□ $\int_a^b p(x) P_{2n-2}(x)\,dx$ вычисляется точно, $\forall P_{2n-2}(x)$.

Возьмем: $P_{2n-2}^{(s)} = \left[\dfrac{\hat{\omega}_n(x)}{x - x_s}\right]^2$. Имеем:

$$\int_a^b p(x) P_{2n-2}^{(s)}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k P_{2n-2}^{(s)}(\hat{x}_k) \ominus c_s \cdot P_{2n-2}^{(s)}(\hat{x}_s);$$

$$c_s = \int_a^b p(x) \frac{P_{2n-2}^{(s)}(x)}{P_{2n-2}^{(s)}(\hat{x}_s)}\,dx, \quad \forall s.$$

$$c_s \geqslant 0.$$

■

Рассмотрим ошибку квадратуры:

$$R_n(f) = R_n(f - P_{2n-1} + P_{2n-1}) = R_n(f - P_{2n-1}) + R_n(P_{2n-1}) =$$
$$= R_n(f - P_{2n-1}).$$

Тогда

$$|R_n(g)| \equiv \left| \int_a^b g(x) p(x)\,dx - \sum c_k g(x_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b p(x) |g(x)|\,dx + \sum c_k |g(x_k)| \leqslant \left\{ \int_a^b p(x)\,dx + \sum c_k \right\} \cdot$$

$$\cdot \max_{[a;b]} |g(x)| = \left\{ 2 \int_a^b p(x)\,dx \right\} \cdot \|g(x)\|;$$

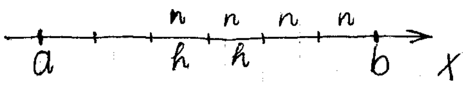
$$|R_n(f)| = |R_n(f - P_{2n-1})| \leqslant \left\{ 2 \int_a^b p(x)\,dx \right\} \cdot \|f - P_{2n-1}\|.$$

Можно так выбрать (!) P_{2n-1}:

$$\inf_{\forall P_{2n-1}} \|P_{2n-1} - f\| = \|\overset{\circ}{P}_{2n-1} - f\| \equiv E_n;$$

$$\boxed{|R_n(f)| \leqslant 2 \int_a^b p(x)\,dx \cdot E_1}$$

Предположим, что мы применяем ф-лу Гаусса в 'составном виде':



$N h = b-a$

Какова оценка погрешности?

$$|R_N^{(n)}(f)| \leq \left\{ \frac{M_{2n}}{(2n)!} \int_a^b |\omega_n^2(x)\, dx \right\} h^{2n}.$$

Можно искать корни ортогонального многочлена не на $[a;b]$, а на $[-1;1]$ путем линейной замены переменной. Существуют наборы c_k, x_k, которые могут (по справочнику) быть найдены по данным n, $[a;b]$, $p(x)$. Кстати, существует около десятка 'стандартных' $p(x)$.

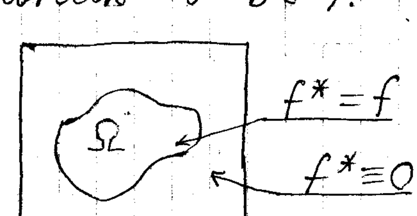
* * *

Рассмотрим теперь интеграл:

$\int\limits_\Omega f(x)dx$, где Ω может быть и многомерной.

Можно поместить область интегрирования в параллелепипед (/ прямоугольник в $\mathbb{R}^2$):

$$\int\limits_\Omega f(x)\,dx \equiv \int\limits_\square f^*(x)\,dx$$



Притом линейной замены можно

Потому достаточно рассматривать единичный квадрат. (куб).

Возьмем N равномерно распределенных в единичном кубе случайных величин:

$\xi_1, \dots, \xi_N$.

'Разыграем' эти величины в кубе (для реализации метода Монте-Карло),

т. е. $\begin{cases} \xi_1 = \dots \\ \dots \\ \xi_N = \dots \end{cases}$

Найдем $f(\xi_k)$ и рассмотрим комбинацию:

$$S_N = \sum_k f(\xi_k) \cdot \frac{1}{N}$$

$$M[S_N] = \sum_k M[f(\xi_k)];$$

$$M[f(\xi_k)] = \int_{\square} f(x)\, p_{\xi_k}(x)\, dx \equiv \int_{\square} f(x) dx \equiv I;$$

$$M\cancel{D}[S_N] = \sum_k D[f(\xi_k)] \cdot \frac{1}{N^2} \quad M[S_N] = \frac{1}{N} \sum_k I = I$$

$$D[f(\xi_k)] = \int_{\square} f^2(x) p_{\xi_k}(x) dx - \left[\int_{\square} f(x) p_{\xi_k}(x)\, dx \right]^2 =$$

$$= I(f^2) - (I(f))^2 \leq \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} = Const;$$

$$D[S_N] = \frac{1}{N^2} \sum_k Df(\xi_k) \leq \frac{1}{N^2} \sum_k \mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}}{N}.$$

Должен существовать $I(f^2)$, т. е. $f \in L_2$.

L_2 – самый широкий класс ф-ций на практике.

Рассмотрим вероятность:

$$P\{\,|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int\limits_{1\leq \varepsilon \leq |x-Mx|} 1^2 p_\xi(x)\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{1\leq |x-Mx|}(x-M\xi)\,p_\xi(x)\,dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)\,p_\xi(x)\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2}D\xi;$$

поэтому

$$P\{|\xi - M\xi| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

(нерав-во Чебышева).

$$P\{\,|S_N - MS_N| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DS_N}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{D\xi}{\varepsilon^2} \equiv \eta;$$

$\varepsilon = \sqrt{\dfrac{D\xi}{\eta}}$; тогда

$$P\{\,|\xi - M\xi| \leq \sqrt{\frac{D\xi}{\eta}}\} \geq 1-\eta.$$

Пусть $\eta = 0{,}01$;

$$P\{\,|\xi - M\xi| \leq 10\sqrt{D\xi}\} \geq 0{,}99.$$

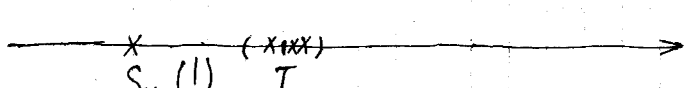
В нашем применении:

$S_N \equiv \xi$;

$$P\{\,|S_N - I| \leq \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{N\eta}}\} \geq 1-\eta$$

$$P\{|S_N - I \leq 10\sqrt{\frac{\mathcal{D}}{N}}\} \geq 0{,}99 \quad (!).$$

$$N:\quad 10\sqrt{\frac{\mathcal{D}}{N}} \leq \delta$$



На практике необходимо посчитать неск-ко раз. В методе Монте-Карло по одному 'пробегу' ничего сказать нельзя.

В машинных вычислениях используют датчики случайных чисел. Ранее использовали физические датчики. Теперь используют псевдослучайные генераторы. Например, метод Вейля:

ξ — иррациональное число;

возьмем дробную долю числа $N\xi$:

$\{N\xi\}$: $0 \ldots 1$.

Вейль доказал:

$$\lim_{N\to+\infty} P\{\{N\xi\} \leq x \leq 1\} = \lim_{N\to+\infty} \frac{m}{N} = x.$$

Современные псевдорандомайзеры обладают недостатком: 'случайные' числа периодичны, и не являются в точности попарно независимыми.

На дом:

придумать модификацию метода, где:

при $\|f'(x)\| \leq M_1$

$$P\left\{|S_N - I| \leq \sqrt{\frac{\mathcal{D}_1}{\eta N^3}}\right\} \geq 1-\eta$$

при $\|f''(x)\| \leq M_2$

$P\{$

7 14.10.2004

Правило Рунге

Пусть I — численное решение задачи (напр., значение интеграла). Пусть

S_N — приближенное значение I.

N — количество обращений к данной в условии задачи информации.

Предположим, что известен главный член погрешности вычисления:

$$I - S_N = K \cdot N^{-m} + \rho, \quad \text{при } N \to +\infty.$$

$\rho = \underline{o}(K^{-m})$,

m не зависит от N.

Пусть задача решена для:

$$N = N_1: \quad I - S_{N_1} = K N_1^{-m} + \rho_1$$

$$N = N_2: \quad I - S_{N_2} = K N_2^{-m} + \rho_2$$

$$S_{N_2} - S_{N_1} = K(N_2^{-m} - N_1^{-m}) + \underbrace{\cancel{(\rho_2 - \rho_1)}}_{\underline{o}(N^{-m})}$$

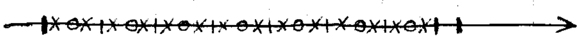
$$K \approx \frac{S_{N_2} - S_{N_1}}{N_2^{-m} - N_1^{-m}}$$

Почему наши предположения именно такие? Потому, что в большинстве практических алгоритмов решения задач погрешность имеет именно такой вид. Подставим K:

$$I - S_{N_2} = \frac{S_{N_2} - S_{N_1}}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^m - 1} + \rho_2$$

Проще всего реализовать алгоритм, удваивая N:

$$|I-S_{2N}| = \frac{|S_{2N}-S_N|}{2^m-1} \leq \varepsilon.$$



Если делить пополам, то можно уменьшить время вычислений.

Однако есть случаи (правда, весьма изысканные), когда правило Рунге "не работает", если отбросить ρ, хотя $\rho = \underline{o}(N^{-m})$. Хорошо, что на практике такое не встречается.

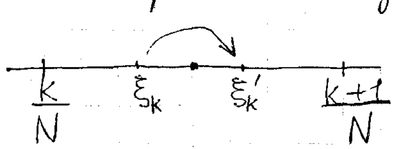
Правило применимо для решения широчайшего круга задач, притом правило достаточно простое. Притом правило апостериорно.

* * *

Как решить задачу №1?

Будем разыгрывать ξ_k на N отрезках длины $\frac{1}{N}$.

Как решить задачу N2?



$$S_N = \frac{1}{N}\sum \frac{f(\xi_k)+f(\xi_k')}{2}.$$

* * *

Произведение одномерных квадратур

$$\int\limits_{\Omega} f(\vec{x})\,d\vec{x}$$

Зафиксируем x_1: $x_1 = \tilde{x}_1$

$$\int\limits_{\Omega} f(\vec{x})dx = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\Omega_{x_1}} f(\tilde{x}_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 dx_3 \ldots dx_n\Big]\,d\tilde{x}_1 =$$

формально!

$$= \int\limits_a^b F(x_1)\,dx_1 = \frac{b-a}{N_1}\sum_{k=1}^{N_1} F(x_1^{(k)}) + R_{N_1} \quad \text{(составная ф-ла);}$$

$$\cancel{F(x_k} \quad F(x_1^{(k)}) = \int\limits_{\Omega_{x_1}} f(x_1^{(k)}, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n =$$

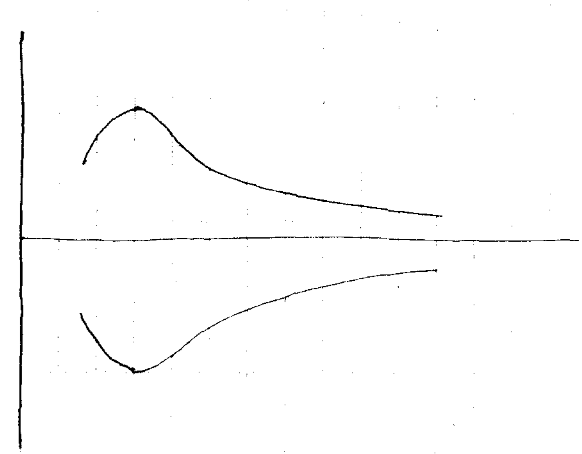
$$= \int\limits_c^d \Big[\int\limits_{\Omega_{x_1 x_2}} f(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \ldots, x_n)\,dx_3 \ldots dx_n\Big]\,dx_2 = \ldots$$

и т.д.

* * *

Быстро осциллирующие функции

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\omega x}\,dx$$



Сложность расчета состоит в том, что число N при большом ω очень велико.

Существует алгоритм, позволяющий выбрать N не зависящим от ω, но подбирать веса c_k по ω.

$x_1 \dots x_k$ – узлы;

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx = \int_a^b [L_n + f - L_n] e^{i\omega x} dx =$$

$$= \int L_n(x) e^{i\omega x} dx + \int r_n(x) e^{i\omega x} dx;$$

$$S_N = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} e^{i\omega x} dx \right]}_{c_k(\omega)} f(x_k)$$

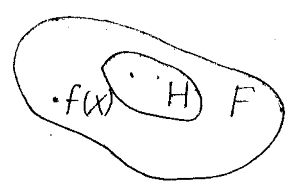
$$|R_N| \leq \int_a^b |r_n(x)| dx$$ (см. ф-лы Ньютона-Котеса).

* * *

Приближения функций

$f(x) \in F \supset H \ni h(x)$,

H – линейное нормированное полное пространство (пр-во Банаха).



Будем приближать ф-ции из H ф-ции $f(x)$.

Можно измерить разность между $h(x)$ и $f(x)$:

$f = h + (f - h)$

$$\inf_{h \in H} \|f - h\| \overset{?}{=} \|f - h^\circ\|$$

Если F - гильбертово пространство (т.е. Банохово пространство, где введено скалярное произведение и оно сепарабельно), то —

Сепарабельность: существует ε-сеть, которое счетно.

ε-сеть в F:

$\exists F' \in F$:

$\forall f \in F : \exists g \in F' : \|f-g\| < \varepsilon$.

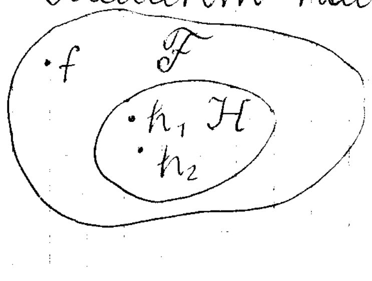
Компактное множество — замкнутое и конечное множество. G - компактное $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ в G существует конечная ε-сеть.

— $\exists!\, h^\circ$

$H_n \neq : h_n = \sum c_i \varphi_i(x) \Rightarrow h_n^\circ$ — отрезок ряда Фурье, элемент наилучшего приближения, по системе $\{\varphi_i\}$.

$\boxed{8}$ 21.10.2004.

Элемент наилучшего приближения:



$f = h + (f-h)$

$\mathcal{F}$ - линейное нормированное полное. Можно измерить ошибку: $\|f-h\|$

$\exists \inf\limits_{h \in H} \|f-h\| \overset{?}{=} \|f-h^\circ\|$, достигается ли инфинум?

h° — ЭНП.

$\|f - h^\circ\| \equiv E$ (ошибка).

Можно произвольным образом ввести ~~ф-цию~~ норму в $\mathcal{F}$, так как оно нормировано.

Можно произвольно выбрать и $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$.

На практике выработан некий подход, который в дальнейшем оправдал себя. Каков критерий ответа на вопрос о приближениях? Каким условиям должен удовлетворять ответ?

— Возьмем ЛНЗ систему функций: $\{\varphi_i(x)\}$. $\mathcal{H}$ можно представить как последовательность вложенных пространств:

$$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{H}_n \subset \ldots \subset \mathcal{H};$$

$$\mathcal{H}_n: \quad h_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x).$$

Если $\mathcal{H}$ полное, то такими комбинациями можно описать, исчерпать всё $\mathcal{H}$.

Подход хорош тем, что:

— можно исчерпать все $\mathcal{H}$

— h_n есть ЛК, что удобно

— $\varphi_i(x)$ можно подбирать

— приближения h_n можно искать в $\mathcal{H}_n$:

$h_n^\circ = \sum_{i=1}^{n} c_i^\circ \varphi_i(x)$, и подбирать уже c_k, чем φ_j.

Подход весьма часто используется на практике.

Теперь наш вопрос выглядит так:
есть ли ЭНП в этом H_n?

<u>Теорема</u>. В любом банаховом пространстве существует элемент наилучшего приближения.

Обозначим:

$$\|f-h_n\| = \|f-\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\|;$$

$$c=\vec{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n);$$

$$F_f \equiv \|f-h_n\| \equiv F_f(c)$$

$$\|h_n\| \equiv F_0(c)$$

$$\|f_1\| \leq \|f_2\| + \|f_1-f_2\| \cancel{\leq \|}$$

$$\|f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2-f_1\|$$

$$-\|f_1-f_2\| \leq \|f_1\|-\|f_2\| \leq \|f_1-f_2\|$$

$$|\,\|f_1\|-\|f_2\|\,| \leq \|f_1-f_2\|;$$

$F_f(c)$:

$$|F_f(c_{(2)}) - F_f(c_{(1)})| \leq \cancel{\|F_f(c} \leq \|\sum_{i=1}^{n}(c_i^{(2)}-c_i^{(1)})\varphi_i(x)\|$$

Теперь ясно, что если

$$\max_{1\leq i\leq n}|c_i^{(1)}-c_i^{(2)}| < \delta,$$

то $$|F_f(c^{(2)})-F_f(c^{(1)})| \leq \delta\cdot\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\|$$

предп.: $\|\varphi_i(x)\| \leq M$, $\forall i$

$$|F_f(c^{(2)})-F_f(c^{(1)})| \leq \delta M n.$$

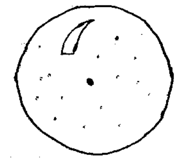
т.е. ф-ция $F_f(c)$ непрерывна.

Притом норма должна быть непрерывна.

Как подобрать c_i? Рассмотрим такие c_i, что их норма:

$$\|\vec{c}\| \equiv \sqrt{\sum c_i^2} = 1.$$

Множество $\vec{c}$ замкнуто:



Ω_1

замкнуто:

(т.е. компактное множество).

На компактном множестве ф-ция достигает наибольшего и наименьшего значений (ср. одномерное мн-во).

Поэтому:

$$\exists\, \tilde{c}: \quad \inf_{c\in\Omega_1} \|F_f(c)\| = \min_{c\in\Omega_1} F_f(c) = F(\tilde{c}) \text{ —}$$

существует такая точка на сфере, что наша $F_f(\tilde{c}) \equiv \tilde{F}$ — наименьшее значение принимает. Притом $\tilde{F} \neq 0$, ибо при $\tilde{F}(\tilde{c}) = 0$: $\tilde{F}_0 = \|\sum \tilde{c}_i \varphi_i\| = 0$, хотя не все $c_i = 0$, ибо лежат на сфере.

Пусть теперь $\vec{c}$ произволен. Пусть:

$$F_0(c) = \Big\|\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i\Big\| = \Big\|\sum \|c\| \frac{c_i}{\|c\|} \varphi_i(x)\Big\| =$$

$$= \|c\| \cdot \Big\|\underbrace{\sum \frac{c_i}{\|c\|}}_{\in\Omega_1} \varphi_i(x)\Big\| = \|c\|\, F_0\Big(\frac{c}{\|c\|}\Big) \geqslant \|c\| \cdot \tilde{F}_0.$$

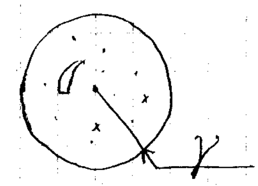
— Значение $F_0(c)$ ограничено снизу ненулевым значением.

$$F_f(c) \geqslant F_0(c) - F_f(0) \quad \text{, ибо}$$
$$\|a\| - \|b\| \leqslant \|a-b\| \leqslant \|a\| + \|b\|,$$
$$F_f(c) = \|f - \sum c_i \varphi_i\|.$$

Достигается ли инфимум у $F_f(c)$.

$\forall \gamma > 0$

1. пусть $c: \quad \|c\| \leqslant \gamma$:



$$\exists \hat{c}: \quad \inf_{h:\|c\|\leqslant\gamma} F_f(c) = F_f(\hat{c})$$

2. пусть $c: \quad \|c\| > \gamma$:

$$F_f(c) \geqslant F_0(c) - F_f(0) = F_0(c) - \|f\| \geqslant \|c\| \cdot \tilde{F}_0 - \|f\| >$$

$$> \gamma \tilde{F}_0 - \|f\|; \quad \ominus$$

возьмем γ;

$$\|f\| \equiv \underset{(\forall c)}{F_f(c)} \geqslant \hat{F}$$

$$\gamma = \frac{2\|f\|}{\tilde{F}_0}$$

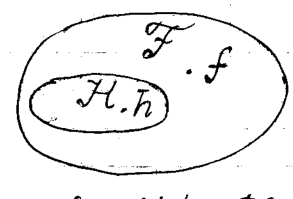
$$\ominus \quad \frac{2\|f\|}{\tilde{F}_0} \tilde{F}_0 - \|f\| = \|f\| = \hat{F},$$

значит, минимум достигается внутри компакта (шара).

Нами было доказано, что:

$\exists\, h_n^0 \in \mathcal{H}_n$:

$$\|f - h_n^0\| = \inf_{\mathcal{H}} \|h - f\|$$



$h \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F} \ni f$

$\{\varphi_i(x)\}$ H_n:

$h_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$

Будем рассматривать:

1) гильбертово пр-во $\mathcal{F}$;

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

$\{h^0 - \text{ЭНП}\} \Leftrightarrow \{f - h^0 \perp \mathcal{H}\}$ (см.!)

c_i — коэф. Фурье;

$h_n^0 = \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\, \varphi_i(x)$

2) $\mathcal{F} \equiv C[a;b]$ (непрерывные на $[a;b]$ функции).

$\varphi_i(x) \equiv x^{i-1}$

$h_n = \sum_1^n a_i \varphi_i(x) = \sum_1^n a_i x^i$. Такой многочлен есть — многочлен наилучшего равномерного приближения.

$\|f\|_C = \max_{[a;b]} |f(x)|$ — равномерная норма.

(метрика).

Мы доказали, что такой многочлен есть (см. теорему). Исследовать св-ва такого многочлена сложно. Обозначим:

$\inf \|f - P_n\| = \|f - P_n^0\| \equiv E_n(f) \equiv E_n$.

Справедлива теорема Валле-Пуссена:

Пусть на $[a;b]$ нашлось $(n+2)$ точки (различные!), такие, что:
$\operatorname{sign}[f(x_i) - P_n(x_i)] = (-1)^i$ (знак меняется от точки к точке, где $a \le x_1 < x_2 \ldots < x_i < \ldots < x_{2+n} \le b$.

Тогда:
$\mu \equiv \min\limits_{x_i} |P_n(x_i) - f(x_i)|$, $E_n \geqslant \mu$.

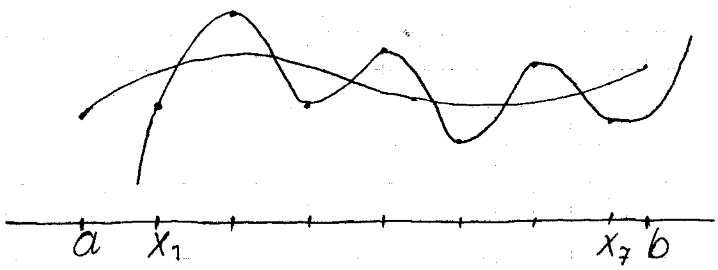
Док-во: пусть следствие неверно: $\mu > E_n$.
$f(x) - P_n(x) = f(x) - P_n^\circ(x) + P_n^\circ(x) - P_n(x)$;
рассмотрим разность:
$P_n^\circ(x) - P_n(x) \equiv f(x) + P_n^\circ(x) - P_n(x) - f(x) =$
$= (f(x) - P_n(x)) + (P_n^\circ(x) - f(x))$;
в x_i:

$$\operatorname{sign}\{\underbrace{(f(x_i) - P_n(x_i))}_{|\ \ |} + \underbrace{(-P_n^\circ(x_i) + f(x_i))}_{|\ \ |}\} = \operatorname{sign}\{f(x_i) - P_n(x_i)\}$$
$$| \quad > \quad |$$

$= (-1)^i$, и этот многочлен имеет $(n+1)$ корень, и пришли к отрицанию условия.

<u>Теорема Чебышева.</u> Для того, чтобы многочлен являлся многочленом наилучшего равномерного приближения на $[a;b]$ для $f(x)$, непр. на $[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы на $[a;b]$ существовал чебышевский альтернанс, т.е. не менее $(n+2)$ точек:
$a \le x_0 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n+1} \le b$:
$f(x_i) - P_n(x_i) = \alpha(-1)^n \| f(x) - P_n(x) \|$. $\Leftrightarrow P_n(x) \equiv P_n^\circ(x)$;

Чебышевский альтернанс:



<u>Достаточность</u>.

$\|f(x)-P_n(x)\| \equiv L$; $\inf L = E_n$; $E_n \leq L(P_n)$.

$L = \mu \leq E_n \leq L$; $L = E_n$, ч.т.д.

Единственен ли $P_n^\circ(x)$? Докажем единственность многочлена наилучшего приближения.

Предп.: $P_1^\circ(x)$, $P_2^\circ(x)$.

Тогда: $\|f-P_1^\circ\| = \|f-P_2^\circ\| = E_n$;

рассм.: $\tilde{P}(x) = \frac{1}{2}\left(P_1^\circ(x) + P_2^\circ(x)\right)$;

$\|f-\tilde{P}\| = \cancel{\|f - \frac{1}{2}P_1^\circ\|} \leq \left\|\frac{f-P_1^\circ}{2}\right\| + \left\|\frac{f-P_2^\circ}{2}\right\| =$

$= \frac{1}{2}E_n + \frac{1}{2}E_n = E_n$;

$\tilde{P}(x)$ — тоже многочлен наилучшего приближения. Поэтому таких многочленов бесконечно много.

Для $\tilde{P}(x)$ должен существовать чебышевский альтернанс. Возьмем такой набор для $\tilde{P}(x)$:

$\tilde{x}_0\ \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n+1}$;

$f(x_i) - \tilde{P}(x_i) = (-1)^i \cdot \alpha \cdot \|\tilde{P}(x) - f(x)\|$, для $\forall i = \overline{0,(n+1)}$.

$$\alpha(-1)^i E_n = f(\tilde{x}_i) - \tilde{P}^\circ(\tilde{x}_i) = \frac{f(\tilde{x}_i) - P_1^\circ(\tilde{x}_i)}{2} + \frac{f(\tilde{x}_i) - P_2^\circ(\tilde{x}_i)}{2}$$

$$||$$

$$E_n = |f(\tilde{x}_i) - \tilde{P}^\circ(\tilde{x}_i)| \leq \frac{1}{2}|f(\tilde{x}_i) - P_1^\circ(\tilde{x}_i)| + \frac{1}{2}|f(\tilde{x}_i - P_2^\circ(\tilde{x}_i)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}E_n + \frac{1}{2}E_n = E_n;$$

$$|f(\tilde{x}_i) - \tilde{P}(\tilde{x}_i)| = E_n;$$

причем

$$|f(\tilde{x}_i) - \tilde{P}_1^\circ(\tilde{x}_i)| = |f(\tilde{x}_i) - P_2^\circ(\tilde{x}_i)| = E_n.$$

$$|f(\tilde{x}_i) - P_1^\circ(x_i) + f(\tilde{x}_i) - P_2^\circ(\tilde{x}_i)| = 2E_n,$$

т. е. $P_1^\circ(x_i) \equiv P_2^\circ(x_i)$ – в $(n+2)$ точках.

1. Пусть $f(x)$ непр. (диффф.), выпуклая ф-ция на $[a;b]$. Построить многочлен P° 1-й степени.
2. $f(x) = x^3$; $[-1;1]$. Построить P° 2-й степени.
3. $f(x) = x^3$, $[0;1]$, P° 2-й ст.

3'. ~~$f(x) = 4x^{34} + 8x - 1$~~; $[-1;2]$; P° 3-ст.

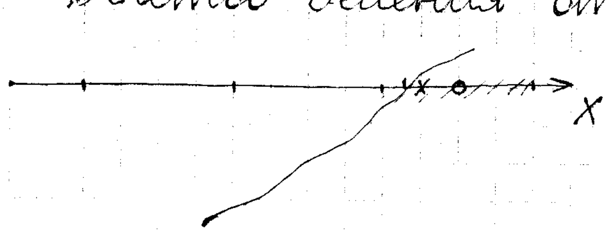
$f(x) = 4x^4 + 8x^3 - x + 5.$

4. $f(x) = \sin(\pi x \cdot 10)$, $[0;1]$, P° 6-ст.

Решение трансцедентных уравнений

$f(x) = 0.$

Метод деления отрезка пополам:



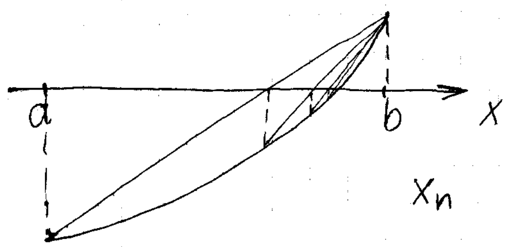
ошибка $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon.$

Простой корень:

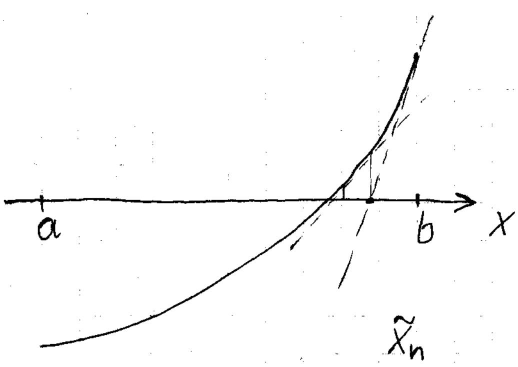
$f(\alpha)=0$

$f'(\alpha)\neq 0.$

Метод хорд



Метод касательных



$|x_n-\tilde{x}_n| =$ mistake.

$(x_n; f(x_n));$

$(b;\ f(b));$

$$\frac{y-f(x_n)}{x-x_n}=\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}$$

$$y=f(x_n)+(x_{n+1}-x_n)\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}=0$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}f(x_n)$$

$(x_n; f(x_n))$

$$y = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\boxed{10}$ 4.11.2004. Итерационные процессы.

(1) $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$g(x)f(x) = 0 \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\underbrace{x + g(x)f(x)}_{\varphi(x)} = x$$

$\Updownarrow$ (2) $x = \varphi(x)$

(3) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, x_0.

Теорема.

1. $x \in X$ — полн. метрич. пр-во
2. $\varphi(x): X \xrightarrow{\varphi} X$
3. $\exists q < 1: \forall x_1, x_2 \in X: \rho(x_1, x_2) q \geqslant \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$.

Тогда:

1. $\exists!\ x = \varphi(x)$
2. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} \quad \forall x_0 \in X$, $\lim = \alpha$
3. $x = \alpha$
4. $\rho(x_n, \alpha) \leqslant \dfrac{a}{1-q} q^n$, $a = \rho(x_1, x_0)$

Предположим, что $\alpha = \varphi(\alpha)$: $f(\alpha) = 0$, и:

$$\begin{cases} \varphi'(\alpha) = \ldots = \varphi^{(s-1)}(\alpha) = 0 \\ \varphi^{(s)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Тогда получим:

$$x_{n+1}-\alpha=\varphi(x_n)-\varphi(\alpha)=\sum_{k=1}^{s-1}\frac{\varphi^{(k)}(\alpha)}{k!}(x_n-\alpha)^k+\frac{\varphi^{(s)}(\xi)}{s!}(x_n-\alpha)^s=$$
$$=\frac{\varphi^{(s)}(\xi)}{s!}(x_n-\alpha)^s,$$

$$|x_{n+1}-\alpha|\le\frac{M_s}{s!}|x_n-\alpha|^s\le\frac{M_s}{s!}\left(\frac{M_s}{s!}|x_{n-1}-\alpha|^s\right)^s.$$

Если условие (4) выполнено, то (3) наз. итерационным процессом s-порядка.

<u>Теорема Чебышева</u> (об ускорении сходимости).

Пусть α - корень и в окрестности α ф-ция f имеет s производных и монотонна.

Тогда можно построить процесс (3) s-порядка.

$y=f(x)$, $\exists\ x=g(y)$

$x=g(f(x))$

$$\alpha=g(0)=g(y)+\sum_{k=1}^{s-1}\frac{g^{(k)}(y)}{k!}(-1)^k y^k+R_s$$

~~$\varphi_s(x)=x+\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^k$~~

$$\varphi_s(x)=x+\sum_{k=1}^{s-1}\frac{(-1)^k(g(f(x)))^{(k)}}{k!}[f(x)]^k,\quad (g(f(x)))^{(k)}\equiv a_k(x).$$

$$\varphi_s'(x)=1-a_1(x)f(x)+\frac{a_2}{2}f^2(x)-\dots$$
$$\varphi_s'(\alpha)=1-a_1(\alpha)f'(\alpha)-a_1'(\alpha)f(\alpha)+\dots$$

1. $\varphi_s'(\alpha)=1-a_1(\alpha)f'(\alpha)=1-\frac{1}{f'(\alpha)}f(\alpha)=1-1=0$,
   ибо $g_y'=\frac{1}{f(x)}$.

$g(f(x))=x;$

$g_y'\cdot f_x'=1$

$g''f'^2+g'f''=0$

$g'''f'^3+3g''f'f''+g'f'''=0, \dots$

отсюда можно найти все $g_y^{(k)}$.

2. $S=2$: $g'f'=1$

$$\varphi_2 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

3. $S=3$: $g''f'^2 + g'f'' = 0$,

$$g'' = -\frac{f''}{f'^3}$$

$$\varphi_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)\, f^2(x)}{2 f'^3} = x - \frac{f}{f'}\left[1 + \frac{f'' f}{2 f'^2}\right].$$

Векторный случай:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x})$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{\varphi}(\vec{x}_n).$$

Метод Ньютона

Пусть $\vec{X}$ – решение.

$$0 = \vec{f}(\vec{X}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x})(\vec{X} - \vec{x}) + \cancel{\bar{o}(\|\vec{X} - \vec{x}\|)};$$

$$\vec{x} \equiv \vec{x}_n, \quad \vec{X} = \vec{x}_{n+1}$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left(\vec{f}^{-1}(\vec{x}_n)\right)^{-1} f(\vec{x}_n)$$

$$\left(f'(\vec{x})\right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

$\ominus$

– Какое $\vec{x}_0$ брать?

– Как обращать матрицу?

$\oplus$

– Быстрая сходимость.

На практике матрицу обращают через 3~5 шагов, чего часто достаточно.

$\boxed{11}$ 11.11.2004.

(1) $Ax = b$

Можно преобразовать:

$0 = D(b - Ax)$, $\|D\| \neq 0$

$x = x + D(b - Ax) = \underbrace{(-DA + E)}_{B} x + \underbrace{Db}_{C}$

(2) $x = Bx + c$

(3) $x^{n+1} = Bx^n + c$, x^0 (итер.)

X — решение;

ошибка: $R_N = x^n - X$ $(\equiv r^n)$

$r^{n+1} = Br^n$ $(3-2)$

$r^n = B^n r^0$

Как оценить матрицу?

Предп. пока, что:

$\|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$ (соответственная норма).

Теорема:

B: $\|B\| < 1$

тогда (2) имеет ед. решение; процесс (3) сходится:

$n \to \infty \Rightarrow x_n \to X$

$\square$ $x = Bx + c$

$\|x\| = \|Bx + c\| \leq \|Bx\| + \|c\| \leq \|B\| \cdot \|x\| + \|c\|$;

$\underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0} \|x\| \leq c$;

$\|x\| \leq \dfrac{c}{1 - \|B\|}$

предп.: $\|c\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Т.: если однородная система имеет ед.

тривиальное решение, то неоднородная имеет единственное решение.

Далее, $\|r^n\| = \|B^n r^0\| \leq \|B\|^n \cdot \|r^0\| \to 0$, $n \to \infty$, $\forall x^0$.

$\square$

<u>Теорема</u>. Итер. процесс (3):

X — решение (2). Чтобы процесс (3) сход. к $X \Leftrightarrow \{ \forall i : |\lambda_i(B)| < 1 \}$.

Как ввести норму матриц и векторов?

13 25.11.2004.

(1) $Ax=b$

(2) $x=Bx+c$

(3) $x^{n+1}=Bx^n+c$, x^0 (метод простой итерации)

$r^n=x^n-X$

$r^n=B^n x^0$

$\|r^n\|\leqslant\|B\|^n\cdot\|x^0\|.$

Достаточность. Все СЗ матрицы B по модулю меньше нуля. Доказать: итерационный процесс сходится при любом x^0.

Док-во.

$\{\forall i: |\lambda_i(B)|<1\}\Leftrightarrow\{\max\limits_{1\le i\le m}|\lambda_i|<1\}$. Поэтому существует $q<1$. $\max\limits_{1\le i\le m}|\lambda_i|<q$. Обозначим: $0<\tau=q-\max\limits_{1\le i\le m}|\lambda_i|$. Рассмотрим такую матрицу: $\frac{1}{\tau}B=\tilde{B}$. Очевидно, $\lambda_i(\tilde{B})=\frac{1}{\tau}\lambda_i(B)$.

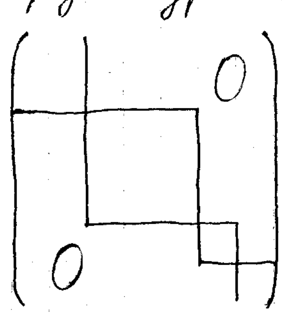
Действительно, $|\tilde{B}-\mu E|=0$ — корни есть $\tilde{\lambda}_i$; $|B-\tau\mu E|=0$, $\tau\mu=\tau\lambda(\tilde{B})=\lambda(B)$. В линейной алгебре доказано:

$\forall C\ \exists \mathcal{D}, \mathcal{D}^{-1}$ (невырожд.): $\mathcal{D}^{-1}C\mathcal{D}$ — м-ца

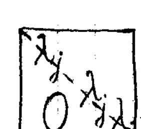
C приводится к форме Лежандра:

$\Lambda=D^{-1}CD.$

Структура матрицы Λ:



блок:

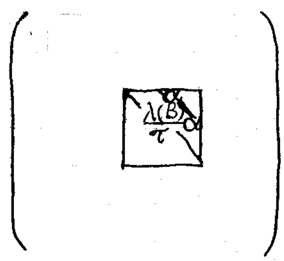


СЗ м-цы, в разных ящиках разные.

$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$. Т.о., можно любую матрицу привести к форме Лежандра.

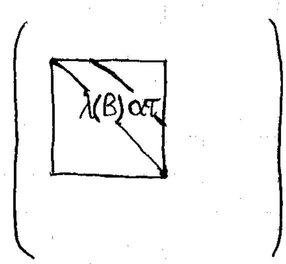
Приведем $\tilde{B}$ к лежандровой форме:

$\exists\, D, D^{-1}:\quad D^{-1}BD = \Lambda;\ \Lambda:$



$\Lambda = D^{-1}\frac{1}{\tau}BD;$

$D^{-1}BD = \tau\Lambda \equiv \bar{\Lambda}.\ \bar{\Lambda}:$



Рассмотрим норму $\|\bar{\Lambda}\|_1 = \max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{m}|\Lambda_{ij}| \le$

$\le \max\limits_{1\le i\le m}\lambda_i(B) + \tau_* = q,\ \ q<1.$

Теперь, $B = D\bar{\Lambda}D^{-1}$,

$\|r^n\| \le \tilde{D}q^n\|x^0\|$, так как

$B^n = D\bar{\Lambda}D^{-1}\cdot\ldots\cdot D\bar{\Lambda}D^{-1} = D\bar{\Lambda}^n D^{-1};$

$\|B^n\|_1 \le \|D\|_1\|\bar{\Lambda}^n\|_1\|D^{-1}\|_1 \le \tilde{D}\cdot q^n,\ \ \|B\| \le \tilde{D}q,$

$\forall x: \quad x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$;

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_i| \cdot \|e_i\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i| \cdot \sum_{i=1}^{m} \|e_i\| = \|x\|_1 \cdot \underbrace{\sum \|e_i\|}_{\text{число, не зависит от } x.}$$

Из стремления $\| \ \|_1$ к нулю следует, что любая норма стремится к нулю, и доказанная теорема справедлива для любой нормы.

* * *

Метод простой итерации с выбором оптимального коэффициента

Пусть $B = E - \alpha A$, тогда $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Пр.: $\quad Ax = b$

$$0 = \alpha(-Ax + b)$$

$$x = x + \alpha(-Ax + b)$$

$$x = (E - \alpha A)x + \alpha b$$

$$x = Bx + c.$$

Пусть $\lambda_i(A) > 0$, и A симметрична и положительно определена $(\Leftrightarrow)$. Можно ли оптимально выбрать коэффициент α?

Предположим, известны a и b: $0 < a \leqslant \lambda_i(A) \leqslant b$.
Тогда: $\lambda_i(B) = 1 - \alpha\lambda_i(A)$.

$$\lambda(A) \equiv \lambda;$$

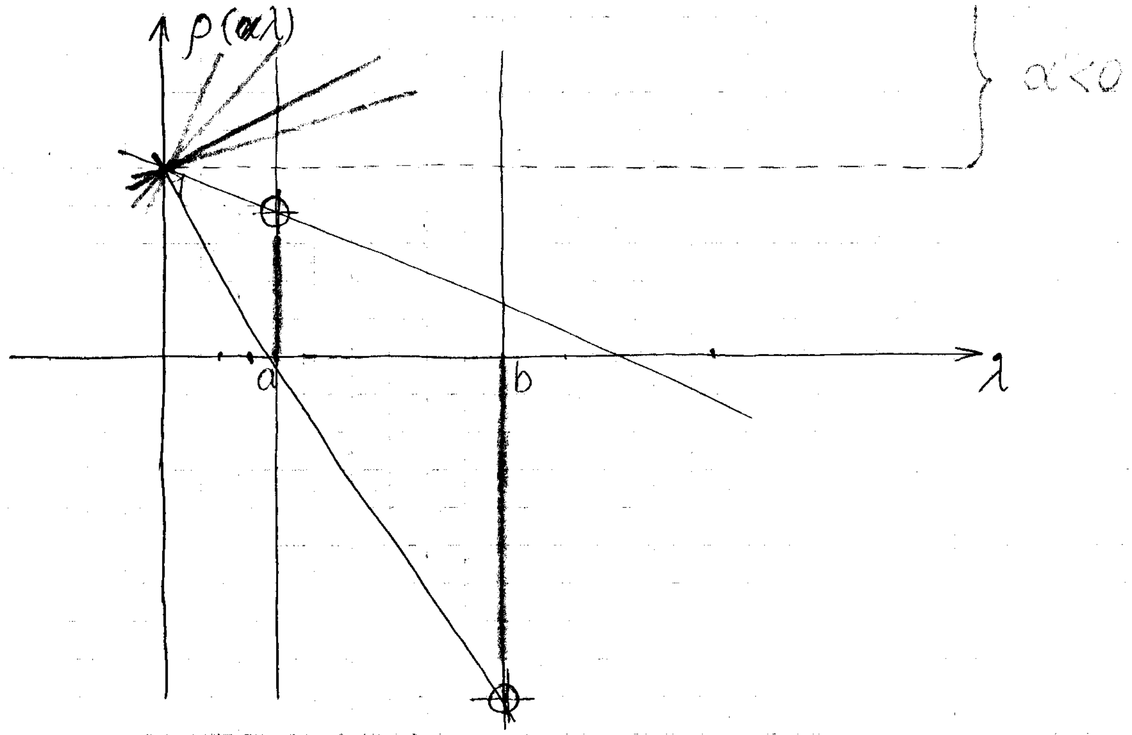
$$\lambda(B) \equiv \mu.$$

$|\mu_i|$: $\max\limits_{1\le i\le m} |\mu_i| < 1 \Leftrightarrow \max\limits_{1\le i\le m} |1-\alpha\lambda_i| < 1$. Это выполнено

если: $\max\limits_{a\le\lambda\le b} |1-\alpha\lambda| < 1$. $\rho(\lambda) \equiv 1-\alpha\lambda$. Желательно

найти: $\min\limits_{\alpha} \max\limits_{a\le\lambda\le b} |1-\alpha\lambda| < 1$. (Для ускорения сходимости).

Ясно, что $\alpha > 0$.



$$\min_{\alpha} \max |\rho(\lambda)| < 1.$$

$$\rho(a) = -\rho(b) \Leftrightarrow \alpha = \min$$

$$1-\alpha a = -1+\alpha b$$

$\alpha_0 = \dfrac{2}{a+b}$, обеспечивает скорейшую сходимость. $\lambda_0 = \dfrac{1}{\alpha_0}$.

Метод наискорейшего градиентного спуска

Пусть решение (1) нужно найти:

$Ax=b$. Пусть A:

1) $A^T=A$ (симметрия)

2) $\lambda(A)>0$ (+ определенность)

Рассмотрим функционал: $F(x)=(A\cdot x,x)-2(b,x)$.

Можно доказать: (1)$\Leftrightarrow$(2) при таких предположениях.

(2): x: $F(x)$ наименьший.

Найдем метод, который позволит отыскать минимум функционала.

Докажем: (1)$\Leftrightarrow$(2).

$Ax=b$: $x=X$ – решение. Рассмотрим вспомогательный функционал:

$$(A(x-X),x-X)-(AX,X)=(Ax,x)-(AX,x)-(Ax,X)=$$
$$=(Ax,x)-2(AX,x)=-2(b,x)+(Ax,x)=F(x).$$

(AX,X) – число, не зависит от x;

$(A(x-X),x-X)\geqslant 0$, зависит от x;

$\Leftrightarrow$ $x=X$ в силу положительной определенности матрицы A.

$\boxed{14}$ 2.12.2004.

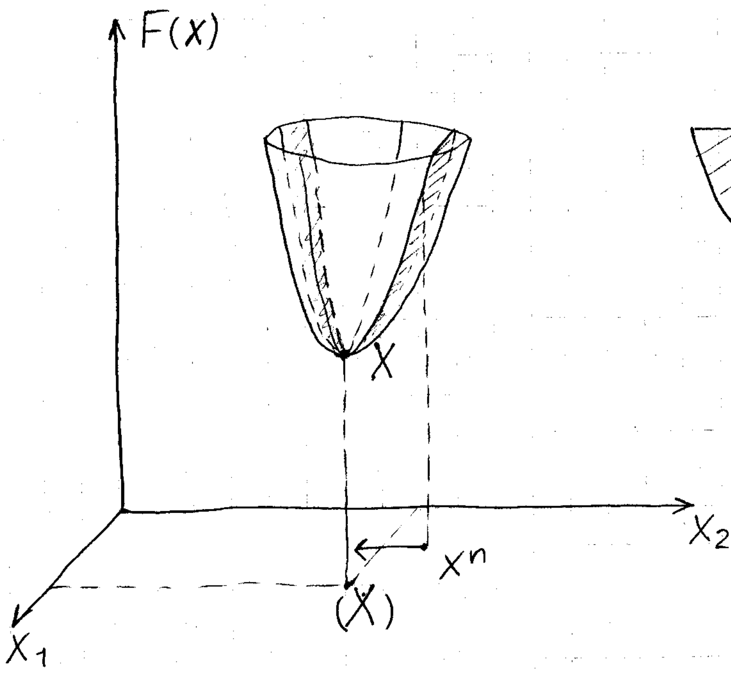
... Будем искать минимум функционала:

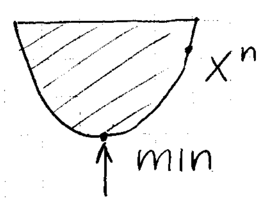
$$F(x) = (Ax,x) - 2(b,x)$$

методом наискорейшего градиентного спуска.

Очевидно, $F(x)$ — биквадратная форма.

$Ax \geq 0$, $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$. В 3-D (Ax,x) можно мыслить как эллиптический параболоид.





Необходимо устроить итерационный процесс, сходящийся к X.

$F(x^n)$, $F(x^{n+1}) \leq F(x^n)$, ибо X — точка минимума.

Но наибольшее изменение функции (поля) самое быстрое — вектор градиента:

самое быстрое направление — $-\mathrm{grad}\, F(x^n)$.

$$x^{n+1} = x^n - \delta_n \mathrm{grad}\, F(x^n),$$

$$\delta_n: \quad F(x^{n+1}(\delta_n)) - \min_{\delta_n} F(x^{n+1}(\delta_n)) = F(x^{n+1}(\delta_n^0))$$

Как выбрать δ_n°?

$$\operatorname{grad} F(x) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\}.$$

$$(F(x))_i = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)$$

$$(Ax, x) = \sum_{l=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{lj} x_j}\, x_l$$

$$(b, x) = \sum_{s=1}^{m} b_s x_s$$

$$(F(x))_k =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\sum_l \underbrace{a_{lk}}_{=a_{kl}} x_l + \sum_j a_{kj} x_j - 2b_k\right) x_k\right] =$$

$$= \sum_l a_{kl} x_l + \sum_j a_{kj} x_j - 2b_k = 2\left(\sum_{r=1}^{m} a_{kr} x_r - \cancel{2} b_k\right);$$

$$\left(\operatorname{grad} F(x^n)\right)_k = 2\left(\sum_{r=1}^{m} a_{kr} x_r^n - b_k\right) = 2\,(Ax^n - b)_k$$

$$\operatorname{grad} F(x^n) = 2(Ax^n - b);$$

$$\text{FN} \quad x^{n+1} = x^n - \delta_n (Ax^n - b);$$

Найдем оптимальное δ_n:

$$\varphi(\delta_n) = x^n - 2\delta_n (Ax - b)$$

$\varphi'(\delta_n^\circ) = 0 \Leftrightarrow \delta_n^\circ$ – наилучшее δ_n.

$$\varphi(\delta_n) = F(x^{n+1}(\delta_n)) = (Ax^{n+1}, x^{n+1}) - 2(b, x^{n+1})$$

$$\varphi'(\delta_n) = \left(A\frac{dx^{n+1}}{d\delta_n}, x^{n+1}\right) + \left(Ax^{n+1}, \frac{dx^{n+1}}{d\delta_n}\right) -$$

$$-\left(2b, \frac{dx^{n+1}}{d\delta_n}\right) = 2\left(Ax^{n+1} - b, \frac{dx^{n+1}}{d\delta_n}\right) = 0;$$

~~Ax^n~~

$$2\left(A(x^n - 2\delta_n(Ax^n - b)) - b, -2(Ax^n - b)\right) = 0;$$

$$\left(A(x^n - 2\delta_n(Ax^n - b)) - b, (Ax^n - b)\right) = 0;$$

$$\delta_n^\circ = \frac{(Ax^n - b, Ax^n - b)}{2(A(Ax^n - b), Ax^n - b)}.$$

$$x^{n+1} = x^n - 2\delta_n(Ax^n - b) = (E - 2\delta_n A)x^n + 2\delta_n b.$$

Итерационный метод с переменным шагом. Оценим погрешность.

$$R^n = x^n - X$$

$$F(x) = (A(x-X), x-X) - (AX, X);$$

$$F(x^n) = (AR^n, R^n) - K$$

Рассмотрим функционал:

$\cancel{F_0(\tau_n)}$

$$F_0(R^n) = (AR^n, R^n); \; F(x^n) = F_0(R^n) + K,$$

δ_0^n дает наименьшее значение функционалу $F_0(R^n)$. Разложим R^n по собственным векторам матрицы A: $(\lambda_i(A) \geq 0)$.

$$R^n = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i$$

$AR^n = \sum_i \xi_i \lambda_i e_i$. Будем считать e_i ортонормальными.

$$F_0(R^n) = (AR^n, R^n);$$

$$F_0(R^n) = \left(\sum_i \lambda_i \xi_i e_i, \sum_j \xi_j e_j\right) = \sum_i \lambda_i \xi_i^2$$

$x^n \longrightarrow x^{n+1}$

$\longrightarrow \tilde{x}^{n+1}$ (с выбором коэф., другой метод).

$$\tilde{R}^{n+1} = BR^n$$

$$F_0(\tilde{R}^{n+1}) = (A\tilde{R}^{n+1}, \tilde{R}^{n+1}) = \left(\sum_i \xi_i(1-\lambda_i\alpha_0)\lambda_i e_i, \sum_j \xi_i(1-\lambda_i\alpha_0)\xi\right.$$

$$\tilde{R}^{n+1} = BR^n = \sum_i \xi_i Be_i = \sum \xi_i \underbrace{(1-\alpha_0\lambda_i)}_{E-\alpha_0 A} e_i,$$

$$F_0(\tilde{R}^{n+1}) = \sum_i \xi_i^2 (1-\lambda_i\alpha_0)^2 \lambda_i.$$

$$|1-\alpha_0\lambda_i| = \left|1 - \frac{2\lambda_i}{a+b}\right| \leq \frac{b-a}{b+a}, \quad 0 < a \leq \lambda_i \leq b;$$

$$F_0(\tilde{R}^{n+1}) \leq \sum_i \xi_i^2 \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 \lambda_i = \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 F_0(\tilde{R}^n).$$

Но $F_0(R^{n+1}) \leq F_0(\tilde{R}_*^{n+1})$. Поэтому оценка погрешности ξ:

$$F_0(R^{n+1}) \leq F(R^n) \cdot \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2$$

$$F_0(R) = (AR, R) = \sum_i \mu_i^2 \lambda_i$$

$$\forall R \ ; \ R = \sum \mu_i e_i \ , e_i : \text{СВ } A.$$

$$a \sum_i \mu_i^2 \leq F_0(R) \leq b \sum_i \mu_i^2 ,$$

$$a \cdot \|R\|^2 \leq F_0(R) \leq b \cdot \|R\|^2.$$

$$a \|R^n\|^2 \leq F_0(R) \leq b \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 \cdot \|R^n\|^2;$$

$$F_0(R^n) \leq \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 F_0(R^{n-1}) \leq \ldots \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{2n} F_0(R^0) \leq$$

$$\leq b \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 \cdot \|R^0\|^2$$

$$\|R^0\|^2$$

$\boxed{15}$ 9.12.2004. МЕТОД РИЧАРДСОНА.

(1) $Ax = b$

$\Updownarrow$

(2) $x = Bx + c$

$x = x - (Ax - b)\alpha$, $\alpha \neq 0$, $B = E - \alpha A$; $c = \alpha b$.

(3) $x^{n+1} = Bx^n + c$.

А что, если устроить нестационарный процесс, выбирая α на каждом шаге?

$$B_n = E - \alpha_n A$$

$$c_n = \alpha_n b.$$

X — точное решение;

$$r^n = x^n - X;$$

$$r^{n+1} = B_n r^n,$$

$$r^n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} B_k\right) r^0.$$

Пусть: $Ae_i = \lambda_i e_i$, $r^0 = \sum \xi_i e_i$;

$$r^n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} B_k\right) \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_i \xi_i \prod_k B_k e_i = \sum_i \xi_i \prod_{k=0}^{n-1} (1-\alpha_k \lambda_i)\, e_i$$

Рассмотрим третью норму:

$$\|r_n\|_3^2 = (r_n, r_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \prod_{k=0}^{n-1} (1-\alpha_k \lambda_i)^2 \leq$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \|X\|_{L_p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x)\,dx\right)^{1/p} \\ \|X\|_\infty = \max|X| \\ p \to \infty. \end{array}}$$

$$\leq \max_{\lambda_i} \left[\prod_{k=1}^{n-1} (1-\alpha_k \lambda_i)^2\right] \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq m} \prod_{k=1}^{n-1} (1-\alpha_k \lambda_i)^2 \cdot \|r^0\|_3^2.$$

Найдем: $\min\limits_{\alpha_k} \max\limits_{\lambda_i} \prod\limits_{k}^{n-1} |1-\alpha_k \lambda_i|$.

Можно поступить так (зная $\lambda(A)$):
$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_{k+1}}$. Иначе, необходимо минимизировать рассматриваемый максимум. Для этого можно поступить, как и раньше.

Предположим, есть оценки для λ:
$0 < a \leq \lambda_i \leq b$. Исследуем максимум:

$$\min_{\alpha_k} \max_{a \leq \lambda \leq b} |\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} (1-\alpha_k \lambda)}_{\text{полином } \tilde{P}_n(\lambda)}|.$$

$\tilde{P}_n(0) = 1 \Rightarrow$ своб. член $= 1$ (нормированность).

$$\tilde{P}_n^0(\lambda) = \frac{T_n^{[a;b]}(\lambda)}{T_n^{[a;b]}(0)} \to \text{наименьшая норма}$$

[Пусть $\|\hat{P}_n(x)\| < \|\tilde{P}_n^0(x)\|$;

$\operatorname{sign}(\tilde{P}_n^0(x_i) - \hat{P}_n(x_i)) = \operatorname{sign}(\tilde{P}_n^0(x_i)) = (-1)^i$ (экстр.)

Но $\tilde{Q}_n(x)$ имеет св. член $= 0$, хотя ~~не~~ все λ не равны нулю.]

λ_k — корни многочлена Чебышева: ——— .

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k} = \frac{1\cdot 2}{(b-a)\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + b + a}.$$

δ^2-процесс ускорения сходимости

Для метода простой итерации. Ускоряем сходимость на каждом шаге.

$B e_i = \lambda_i e_i,$

$r^n = B^n r^0.$

$r^0 = \sum \xi_i e_i = w_1 + \ldots$

Пусть: (предп.: процесс сход.):

$1 > |\lambda_1| \geqslant \ldots$, и пусть λ_1 не есть кратное значение.

$$x^{n-2} - X = r^{n-2} = B^{n-2} r^0 = \xi_1 \lambda_1^{n-2} e_1 + \ldots$$

$$x^{n-1} - X = r^{n-1} = B^{n-1} r^0 = \xi_1 \lambda^{n-1} e_1 + \ldots$$

$$x^{n} - X = r^{n} = B^{n} r^0 = \xi_1 \lambda^{n} e_1 + \ldots$$

$$x^{n-1} - x^{n-2} = r^{n-1} - r^{n-2} = w_1 \lambda_1^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \bar{o}(\lambda_2^{n-1})$$

$$x^{n} - x^{n-1} = w_1 \lambda_1^{n}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) + \bar{o}(\lambda_2^{n})$$

$$(x^n - x^{n-1}, x^{n-1} - x^{n-2}) = \|w_1\|^2 \lambda_1^{2n}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\lambda} + $$
$$+ \bar{o}(\lambda_1^{2n-1});$$

$$(x^n - x^{n-1}, x^n - x^{n-1}) = \|w_1\|^2 \lambda_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \bar{o}(\lambda_1^n \lambda_2^{n-1});$$

$$\bar{\lambda}_1 = \left(\frac{(x^n - x^{n-1}, x^{n-1} - x^{n-2})}{(x^n - x^{n-1}, x^n - x^{n-1})}\right) = \lambda_1 \frac{1 + \bar{o}((\lambda_2/\lambda_1)^n)}{1 + \bar{o}((\lambda_2/\lambda_1)^n)} =$$

$= \lambda_1 + \bar{o}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right)$. Нашли максимальное СЗ матрицы B.

Рассмотрим вектор $(x^n - x^{n-1})/(\bar{\lambda}_1^n(1 - 1/\bar{\lambda}_1))$.

$$v = \frac{x^n - x^{n-1}}{\lambda_1^n\left(1+\frac{1}{\lambda_1^n}\right)} = w_1 + \bar{o}(\lambda_2^n)$$

$$y^n = x^n - v^n, \quad y^n - X = \bar{o}(\lambda_2^n).$$

$\boxed{16}$ 10.12.2004. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

(основные понятия)

Любой процесс, сформулированный математически, может быть записан в операторной форме:

u — закон;

$Lu = f$ — задача.

Математически поставленная задача:

— есть описание процесса,

— решение существует и оно единственно.

Итак, задача:

$$(1)\begin{cases} Lu = f, \quad x \in \Omega. \\ \text{Кроме того, необходимы граничные условия:} \\ lu|_\Gamma = \varphi \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$Au = f.$

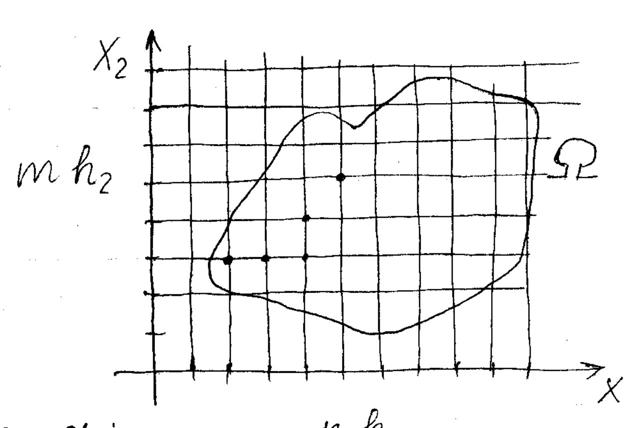
Как решать?

Можно выбрать в Ω конечное число точек.

Ω_h, Γ_h.

u в h-точках — вектор;

f_h, φ_h.



Далее каким-то образом переопределяют операторы L, l над Ω_h.

$$(2) \begin{cases} L_h u_h = f_h \\ l_h u_h\big|_{\Gamma_h} = \varphi_h \end{cases} \Leftrightarrow A_h u_h = F_h$$

Предположим, что удалось доказать:

$(*)$. $\quad \|[u]_h - u_h\|_{h\to 0} \to 0.$

Сходимость. Говорят, что решение (2) сходится к решению (1), если выполнено $(*)$. Сходимость l-го порядка: $\exists C : \|[u]_h - u_h\| \le C h^l$.

Аппроксимация. Говорят, что задача (2) аппроксимирует задачу (1), если

$$\|A_h[u]_h - F_h\| \longrightarrow 0 .$$

Аппроксимация k-порядка:

$$\|A_h[u]_h - F_h\| \le c_1 h^k.$$

Можно обосновать аппроксимацию, если знать ф-лу Тейлора и понимать задачу (1).

Однако при решении может выясниться неустойчивость задачи. Любая ~~неустойчиво~~ ошибка тогда может стать очень большой.

Устойчивость. Задача (2) устойчива, если:

1. $\forall F_h \in \Phi\ \exists!\ u_h$.
2. $\exists c_2, h_0, \forall h < h_0 : \|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\| \le c_2 \|F_h^{(1)} - F_h^{(2)}\|$.

$$\begin{cases} A_h u_h^{(1)} = F_h^{(1)} \\ A_h u_h^{(2)} = F_h^{(2)} \end{cases}$$

Существуют приемы выяснения устойчивости. (Спектральные методы).

<u>Теорема</u>. Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость, причем $C = C_1 C_2$, $l = k$.

[

Задачу (2) называют разностной схемой.

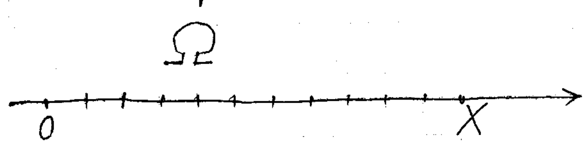
Есть практический опыт $(1) \to (2)$, притом достаточно гибкие.

Понятно, что хорошо бы увеличить k. Хотя нельзя безгранично увеличивать k, ибо ~~при~~ после некоторого предельного k задача становится неустойчивой.

Рассмотрим задачу:

$$(1) \begin{cases} y' - y = 1 + x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Как решить численно?



$x_n = nh \quad (\Omega_h)$.

$$(2) \left\{ \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - y_n = 1 + x_n, \ y_0 = 1 \right.$$

Рассмотрим аппроксимацию.

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}-y(x_n)-1-x_n$$

невязка

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\frac{y'(x_n)}{1!}h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\bar{o}(h^3)$$

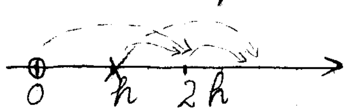
$$y(x_{n-1})=y(x_n)-\frac{y'(x_n)}{1!}h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\bar{o}(h^3);$$

$$y(x_{n+1})-y(x_{n-1})=2hy'(x_n)+\bar{o}(h^3)$$

$$y'(x_n)+\bar{o}(h^2)-y(x_n)-1-x_n=\bar{o}(h^2),$$

аппроксимация 2-го порядка.

Как реализовать разностную схему?



$$y_1=y_0+hy_0'+\frac{h^2}{2}+\bar{o}(h^2)=\cancel{1+h(1+2h)}=1+h($$

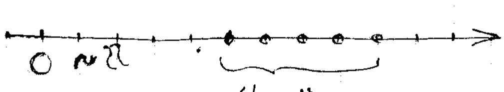
(из уравнения)

$$\begin{cases} y'-y=1+x \\ y_0'=1 \\ y_1'=1+2h. \end{cases}$$

В нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Как решать? – Конечно-разностные методы.



$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i y_{n-i}}{h}=\sum_{i=0}^{k} b_i f_{n-i},$$

a_i, b_i – неопр. коэф.

Необходимо подобрать k так, чтобы получить аппроксимацию. (m – порядка)

$f_{n-i} = f(x_{n-i}, y_{n-i})$;

$$\frac{\sum\limits_i^k a_i y_{n-i}}{h} - \sum^k b_i f_{n-i} = \bar{o}(h^m)$$

В точке x_n разложим по ф-ле Тейлора (до $(m+1)$-порядка) точное решение.

$y'(x_{n-i}) = f(x_{n-i}, y_{n-i})$.

Приведем подобные члены. Оставляем $\bar{o}(h^m)$.

$b_0 = 0 \Rightarrow$ явная схема. (худшая устойчивость).

$b_0 \neq 0 \Rightarrow$ неявная схема.

<u>Теорема</u>. Предп.: схема имеет порядок аппроксимации n. Если схема явная и $n > k$,

схема неявная, m – нечетн., $m > k+1$;

-//- m – четн., $m > k+2$,

Тогда схема неустойчива.

(**) $\sum \qquad = h \qquad$, h не влияет на уст.

$\sum a_i \lambda^{n-i} = 0$

Схема (**) уст $\Leftrightarrow$ λ_i лежат внутри или на границе ед. круга, причем на границе не должно быть кратных корней.

$\boxed{17}$ 16.12.2004.

МЕТОД РИТЦА

(1) $Au = f \quad ("b")$

$A = A^* > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2) \quad [$

(2) $F(u) = (Au, u) - 2(b, u) - \min.$

Для функций при разрывных коэффициентах задача (1) как бы теряет смысл, но задача (2) — не теряет. Более того, интегрирование повышает гладкость ф-ций в (2).

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots H$$

$$\{\varphi_i(x)\}$$

$$H_n: \; u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \quad (\in \mathcal{R}^n)$$

$$u_n^0 = \sum c_i^0 \varphi_i(x) \Rightarrow n\text{-мерная задача.}$$

$$F(u_n) = \left(\sum_i c_i A\varphi_i, \sum_j c_j \varphi_j\right) - 2\left(b, \sum_k c_k \varphi_k\right) =$$

$$= \sum_i \sum_j c_i c_j (A\varphi_i, \varphi_j) - 2\sum_k c_k (b, \varphi_k).$$

Минимум функционала существует.

$F'(u^0) = 0 \Leftrightarrow u^0$ — решение.

$F(u_n) \equiv \Phi(c_1 \ldots c_n)$;

тогда:

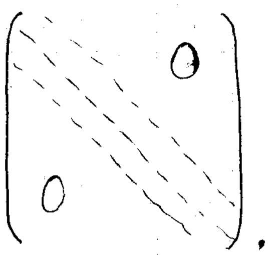
$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial c_k} = 0 \right. , \; k = \overline{0, n}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_l} = \sum_j c_j (A\varphi_l, \varphi_j) + \sum_i c_i (A\varphi_i, \varphi_l) - 2 (b, \varphi_l) =$$

$$= 2\sum_j c_j (A\varphi_l, \varphi_j) - 2(b, \varphi_l) = 0;$$

$$\left\{ \sum_i c_i^0 (A\varphi_i, \varphi_j) = (b, \varphi_j) \right.$$

Можно подобрать $\varphi_i(x)$ так, чтобы матрица системы имела 'хороший' вид. Например, трехдиагональная матрица (динамические задачи):



В некотором более общем случае, можно представить нашу систему сл. обр.:

$$\begin{cases} u_0 = \varkappa_1 u_1 + \mu_1 \\ A_n u_{n-1} - C_n u_n + B_n u_{n+1} = -F_n, & 1 \leq n \leq N-1. \\ u_N = \varkappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varkappa_1 & 0 & \dots & & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \dots & & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & & & 0\ -\varkappa_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$ – система с 3-диаг. матрицей.

Показано, что для решения такой системы потребуется $5N$ умножений (за счет того, что матрица имеет специальный вид.

$$u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1};$$

$$A_n(\alpha_n u_n + \beta_n) - C_n u_n + B_n u_{n+1} = -F_n$$

$$(A_n \alpha_n - C_n) u_n = -\beta_n A_n - F_n - B_n u_{n+1};$$

$$u_n = -\frac{\beta_n A_n - F_n}{A_n \alpha_n - C_n} - \frac{B_n}{A_n \alpha_n - C_n} u_{n+1};$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{-A_n \alpha_n + C_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{F_n - \beta_n A_n}{A_n \alpha_n - C_n}. \quad \alpha_1 - ?$$

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \quad \beta_1 = \mu_1$$

Таким образом, можно найти α_k, β_k (любые). (Прямой ход прогонки).

$$\begin{cases} u_{N-1} = \alpha_N u_N + \beta_N \\ u_N = \varkappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \end{cases} \Rightarrow u_{N-1}, u_N; \Rightarrow u_{N-2}, \dots, u_0.$$

(обратный ход прогонки).

Предположим на каком-то шаге прогонки произошла ошибка:

$$u_{n+1} = u_{n+1}^* + \delta_{n+1}.$$

u_n?

$$u_n^* = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1} + \underbrace{\alpha_{n+1}\delta_{n+1}}_{\delta_n}$$

$|\alpha_n| \leq 1 \ \forall n \Rightarrow$ устойчивость алгоритма.

Если $\forall n: |C_n| \geq |A_n| + |B_n|$, $|\varkappa_1| \leq 1$; $\underline{|\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2}$, то метод прогонки устойчив.

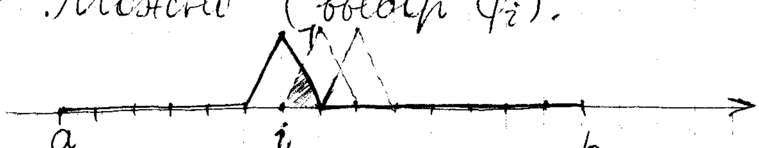
■ $|C_n - \underbrace{\alpha_n}_{|\,|<1} A_n| \geq |C_n| - |\alpha_n A_n| \geq |C_n| - |A_n| \geq |B_n|$; (>0)

$|\alpha_{n+1}| \leq 1.$ ■

Нельзя ли сделать нашу [1] систему 3-диагональной?

$$\left\{ \sum_i c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (b, \varphi_j) \right.$$

— Можно (выбор φ_i).

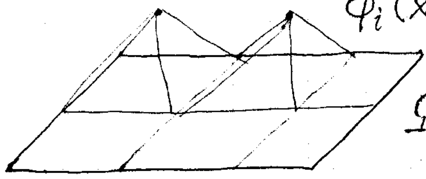


$\varphi_i(x)$

$|i+j| > 1 \Rightarrow \int = 0.$

(Метод конечных элементов).

А как решать в $\mathcal{R}^2$?



Как разбить область? — Этот вопрос пока не разрешен. Удобнее всего триангулировать область.

А что, если $A > 0$, но $A^* \neq A$. Как быть?
То же, что с H_n.

$Au_n - f \neq 0$ (невязка).

Подберем c_i: $(\underbrace{Au_n - f}_{\to 0}, \varphi_i) = 0$, $\forall i$.
$\to 0$, как в рядах Фурье.

$(Au_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j)$;

$\left\{ \sum_i (A\varphi_i, \varphi_j) c_i = (f, \varphi_j) \right.$ (метод Галёркина)

Методы отличаются тем, что Галеркин^T=Ритц.